АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ЦЕНТРАЛЬНЫЙ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

В. А. Волконский

МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ И ВЗАИМОСВЯЗИ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1967

Монография является теоретическим обобщением широкого круга исследований, проведенных в последние годы в Центральном экономико-математическом институте АН СССР и других научно-исследовательских учреждениях в области оптимального планирования и управления народным хозяйством. В работе предлагается описание народного хозяйства в виде системы взаимосвязанных экономико-математических моделей. На ее основе исследуется значение экономических показателей и принципы их планирования, а также действие товарно-денежного механизма и возможности его использования как инструмента оптимизации. Рассматриваются методы согласования моделей разных уровней хозяйственной иерархии и вычислительные алгоритмы для расчетов на ЭВМ.

Ответственный редактор

Б. Н. МИХАЛЕВСКИЙ

1-8-3
109—67

ВВЕДЕНИЕ

Основная цель науки о социалистическом хозяйствовании — изучение функционирования экономического механизма и его совершенствование. Сама постановка задачи совершенствования экономического управления предполагает постулирование возможности сравнения различных вариантов (т. е. существование некоторого критерия оптимальности) и возможности выбора. В этом смысле *задачи всей экономической науки тождественны с задачами теории оптимального управления экономикой.* Управление современным хозяйством невозможно без планирования. Эта функция хозяйственного управления настолько важна, что обычно говорят о системе планирования и управления.

Цель развития теории оптимального планирования и управления — внедрение ее представлений в практику хозяйственного руководства. Однако при этом нельзя исходить только из изучения существующей сложившейся практики хозяйствования. Для развития такой теории наибольшее значение имеет конструирование идеальной, желаемой системы управления, которая могла бы явиться схемой для разработки и внедрения системы оптимального планирования и управления, охватывающей все стороны и проблемы управления хозяйством.

Подход к экономике как системе оптимального управления в наибольшей степени соответствует социалистической науке, поскольку именно для нее характерна постановка задачи сознательного руководства социально-экономическими процессами со стороны общества.

Теория оптимального управления и планирования дает новый язык для описания и исследования и инструмент для более строгого подхода к постановке и решению экономических вопросов. Можно сказать, что в настоящее время только этот методологический подход

служит надежным компасом при изучении такой сложнейшей системы, как экономика, позволяет свести к минимуму поиски в бесперспективных направлениях и увязать в единое целое различные предложения по совершенствованию этой системы, которые учитывают ее отдельные стороны. Например, одним из центральных вопросов экономической теории является вопрос о природе цен. Имеется много различных предложений о принципах исчисления цен, учитывающих те или иные требования, которым они должны удовлетворять. До сих пор идут споры среди экономистов, должны ли строиться цены по стоимостному принципу или по принципу цен производства, должны ли лежать в их основе потребительские или производственные оценки. Теория оптимального планирования и управления, рассматривающая цены как один из элементов общей системы экономического управления, позволяет разрешить эти противоречия и увязать различные предложения (см., например, раздел VII).

Утверждение подхода к экономике как системе оптимального управления хозяйством [1] и к задаче планирования как задаче отыскания народнохозяйственного оптимума — важнейшее достижение советской экономико-математической школы и в первую очередь Л. В. Канторовича, В. С. Немчинова и В. В. Новожилова. Подход к хозяйственному планированию как к задаче оптимизации был впервые сформулирован Л. В. Канторовичем в 1939 г. Это явилось выдающимся вкладом в мировую науку, надолго опередившим достижения зарубежных стран. Основные представления теории оптимального планирования изложены в его книге [2].

Резкое расширение фронта работ по теоретическим вопросам построения системы оптимального планирования и внедрению экономико-математических методов ставит задачу дальнейшего обобщения и разработки более последовательных представлений о системе оптимального планирования и управления, охватывающей все стороны хозяйства, и о комплексе проблем, связанных с ее реализацией. Настоящая работа предлагает пути решения некоторых принципиальных вопросов, связанных с этой задачей. Причем эти предложения основываются на исследованиях, посвященных изучению общих теоретических и практических принципов анализа и син-

теза системы оптимального планирования и управления [2—12]. Определенное влияние на содержание настоящей работы оказала также монография [13].

С методологической точки зрения важно также указать на связь теории оптимального управления хозяйством с общим развитием науки об управлении. Экономика представляет собой специальный вид кибернетической системы, обладающей большой сложностью, т. е. системы, включающей как материальные процессы, так и управление этими процессами. К ней применимы все основные современные представления о сложных кибернетических системах (см., например, [70]). С этой точки зрения экономику можно рассматривать как область кибернетики. В то же время изучение этой специальной кибернетической системы дает возможность сформулировать многие конкретные принципы ее моделирования.

Работа посвящена изучению принципов построения и функционирования системы оптимального планирования и управления и не содержит целостного описания какой-либо конкретной схемы ее реализации.

Изложение построено по следующей схеме. В разделе I излагаются основные принципиальные подходы к пониманию народнохозяйственного оптимума и представление о системе моделей оптимального планирования. В разделе II дается описание моделей общественного производства. Раздел III посвящен проблеме критерия оптимальности и изложению модели потребления как статистического описания поведения потребителей. В разделе IV рассматривается модель товарно-денежного механизма и теоретические основы выбора показателя для оценки хозяйственной деятельности. В разделе V излагаются принципиальные положения о механизме функционирования системы оптимального экономического планирования и управления и вычислительные алгоритмы. Раздел VI посвящен изложению специальных методов описания алгоритмов и расчета экономических моделей, имеющих важное теоретическое и практическое значение. Раздел VII специально посвящен важнейшей проблеме экономики — проблеме цен и методов их расчета.

На формирование круга проблем, затронутых в книге, и общей концепции автора определяющее влияние оказало постоянное сотрудничество и обсуждение этих

проблем с ведущими работниками Центрального экономико-математического института АН СССР, а также с научными работниками в области экономико-математических методов Сибирского отделения АН СССР.

Автор выражает глубокую признательность всем, кто принял участие в обсуждении предварительного (ротапринтного) варианта книги в Москве и в Новосибирске, и высказал свои замечания и пожелания, а также приносит сердечную благодарность Л. М. Боруновой и О. А. Рутц за большую помощь в подготовке рукописи к печати.

I. ПОНЯТИЕ НАРОДНОХОЗЯЙСТВЕННОГО ОПТИМУМА

1⁰. О системе оптимального планирования и управления

Цель социалистического производства — максимальное удовлетворение потребностей общества. Как уже говорилось, важнейшим постулатом теории оптимального планирования является возможность оценивать и сравнивать различные варианты плана с точки зрения общественного предпочтения, или полезности для общества, или степени удовлетворения потребностей общества.

План, для которого любые изменения, допустимые с точки зрения возможностей производства, оказываются нецелесообразными, не увеличивающими его полезности для общества, называется оптимальным. Как и все понятия, понятие оптимума не является абсолютным. Когда говорят об оптимальности системы, подразумевают, что она имеет определенные степени свободы, и можно указать, что в ней считается заданным, а что подлежит оптимизации. Другими словами, говоря об оптимуме, имеют в виду оптимальные значения некоторой группы параметров, характеризующих систему (управляющие параметры) при заданных значениях остальных параметров. Говоря о народнохозяйственном оптимуме, обычно считают заданными технологические параметры и связи (существующие или ожидаемые, если речь идет о перспективном планировании). В настоящей работе не ставится также вопрос об оптимизации системы распределения благ в обществе, так что оптимум, о котором говорится в разделе III, следовало бы называть оптимумом относительно данной системы распределения.

Более того, можно говорить, например, об оптимальности показателей, касающихся только высших уровней системы хозяйственного управления, не ставя задачи внедрения системы оптимального управления на всех предприятиях и рассматривая показатели их работы как заданные и изучаемые статистически.

В соответствии с этим весь процесс совершенствования планирования и управления естественно рассматривать как *последовательное «углубление оптимизации»*, связанное со все более полной и точной переработкой экономической информации и с включением в сферу оптимизации все большего числа параметров социально-экономического и хозяйственно-технологического регулирования. Экономическая информация в широком смысле — как данные о фактическом состоянии хозяйства и наиболее эффективные плановые решения, так и техническая информация — имеет не менее важное значение для народного хозяйства, чем любые материальные ценности. В связи с этим управление народным хозяйством должно превратиться в новую, высоко эффективную отрасль хозяйства, «продукция» которой — методы и технические средства переработки информации и сама информация — внедряется и используется во всех других отраслях хозяйства в соответствии с их эффективностью.

Нереалистично представлять создание системы оптимального планирования и управления как законченный комплекс мероприятий, после осуществления которого экономическая система перейдет на новый, оптимальный режим, и в связи с этим говорить о переходном периоде от существующего режима к оптимальному.

В то же время внедрение методов оптимального планирования сопряжено с серьезной перестройкой работы плановых органов и других хозяйственных организаций, и трудности, возникающие при внедрении этих методов в отдельных звеньях управления, говорят о необходимости проведения такой перестройки последовательными этапами. В результате каждого этапа достигается более высокая ступень оптимизации в управлении хозяйством (см. 31°).

Аналогично можно говорить также о последовательном расширении и углублении теории оптимизации как некоторой идеальной схемы, о которой шла речь во введении.

2⁰. О распределении функций хозяйственного управления

Сложность хозяйственной системы приводит к необходимости распределения функций по разработке и выполнению плана между различными хозяйственными органами, т. е. децентрализации функций планирования и управления и определенной самостоятельности этих органов. Поэтому центральная задача теории оптимального управления — разработка системы взаимоотношений между хозяйственными органами, при которой стремление каждого органа к максимизации своего индивидуального выигрыша («локального критерия оптимальности», или показателя хозяйственной деятельности) соответствует движению всей системы к оптимуму. Такую систему можно назвать системой децентрализованного оптимального планирования и управления.

Важнейшее значение в этом отношении имеет товарно-денежный, или хозрасчетный, механизм, т. е. механизм хозяйственного управления, или метод принятия решений, при котором производится сведение каждого хозяйственного ресурса к единому измерителю с помощью цен. Роль цен при этом состоит в измерении ценности для общества единицы каждого ресурса или в сопоставлении того вклада в общий критерий оптимальности, который может внести эта единица. Теория оптимального планирования показывает, что в широком классе моделей этим свойством обладают объективно-обусловленные оценки (см., например, [2, 14, 15]).

Если модели оптимального планирования достаточно адекватны действительным условиям хозяйства, то *оценки*, полученные из этих моделей, *могут быть использованы в качестве оптимальных цен*. Естественно требовать от системы ценообразования, чтобы цены стремились к оптимальным и удовлетворяли этому условию.

Это свойство оптимальных цен, с одной стороны, приводит к естественному показателю для оценки хозяйственной деятельности производственных единиц и органов экономического управления в виде прибыли (разности результатов и затрат). С другой стороны, оно дает возможность оценивать затраты ресурсов органами, ответственными за непроизводственное потребление общества, и распределять эти затраты в соответствии с общест-

венным предпочтением и с принятыми принципами распределения (например, в соответствии с принципом распределения по труду).

Крупнейшее достижение мировой экономико-математической науки — строгое обоснование того, что такая система цен при широких условиях существует и что возможно установление системы децентрализованного оптимального управления на основе товарно-денежных, или хозрасчетных, отношений.

Математическим обоснованием этого служат модели линейного и выпуклого программирования и модели экономического равновесия (см. раздел IV). Изучение моделей равновесия приводит к важному выводу о том, что в тех условиях и в той мере, в какой модели линейного или выпуклого программирования оказываются адекватными хозяйственной реальности, система цен и план производства и потребления оптимальны с точки зрения всего хозяйства в том и только в том случае, если они в наибольшей степени соответствуют интересам каждого хозяйственного органа в отдельности. Точнее, план оптимален, если: 1) орган, планирующий непроизводственное потребление, формирует план, оптимальный с точки зрения удовлетворения общественных потребностей в пределах общего фонда потребления (в денежном выражении); 2) план каждого производственного комплекса соответствует максимуму его прибыли и 3) цена на каждый ресурс такова, что производство равно потреблению (цены равновесия).

Этот факт имеет важнейшее значение, так как позволяет использовать для организации системы оптимального экономического управления принцип *гомеостата*: всякая система изменяет свое состояние до тех пор, пока не попадет в положение равновесия [1]. Раз точка оптимума экономической системы совпадает с точкой равновесия, то задача состоит в том, чтобы построить механизм, заставляющий систему быстро приходить в состояние равновесия.

Исследование процессов улучшения плана путем обмена информацией между хозяйственными органами (движение системы к положению равновесия) также

---

[1] Концепция народнохозяйственного оптимума, основанная на этом принципе, развита также в работе [74].

может проводиться с помощью математических методов (см. разделы V и VI).

Непредвиденные изменения условий производства или предпочтения общества и прогнозы таких изменений в будущем вызывают соответствующие изменения планов. Система оптимальных цен, или цен равновесия, неразрывно связана с планом, и изменения плана должны, вообще говоря, вести к изменению системы цен. Другими словами, изменение внешних условий вызывает изменение всего состояния экономического равновесия (планов производства и цен вместе с планируемой динамикой их изменения в будущем). Отсюда вытекают высокие требования к гибкости системы планирования и ценообразования. Очевидно, эти требования не могут быть выполнены при полностью централизованном установлении цен. Изучение моделей экономического равновесия показывает, что функции установления оптимальных цен могут быть *децентрализованы*, так же как и процесс разработки плана.

Рациональная степень децентрализации определяется объемом информации, которая должна быть переработана для успешного руководства тем или иным хозяйственным комплексом, и имеющимися средствами ее переработки, т. е. в конечном итоге возможной скоростью и точностью ее переработки в различных звеньях системы управления. Наглядный пример зависимости степени децентрализации от возможностей переработки информации дает изменение организации управления в крупных американских фирмах (см. [16]). Процесс усиления децентрализации управления, происходивший начиная с 20-х годов, сменился в конце 50-х годов тенденцией к новому усилению централизации в связи с широким использованием ЭВМ.

В принципе можно представить себе положение, когда при наличии достаточного парка вычислительных машин рациональная система обмена информацией между хозяйственными органами вполне заменит основанный на самостоятельности отдельных органов хозрасчетный механизм в его функции выработки информации о состоянии экономического оптимума. Однако, учитывая, что на всех уровнях управления имеется область неформальных решений, принимаемых человеком, такая информация не должна использоваться автоматически как

директивная информация. Она должна рассматриваться как консультативная информация, как план-рекомендация, окончательное, юридическое оформление которого есть функция человека.

Участие человека во всех этапах хозяйственного процесса определяет такую же роль, которую играет в экономике вопрос о системе стимулирования и ответственности за принятые решения. Особенно важна роль этой системы в тех областях системы хозяйственного управления, где велика свобода выбора решений, определяемого инициативой человека.

При теоретическом анализе возможностей использования децентрализации функций оптимального экономического управления можно выделить следующие три аспекта проблемы:

1) выработку информации об оптимальном режиме функционирования экономики (например, оптимальный план и оптимальные цены) вне зависимости от того, как будет использована эта информация (как чисто консультативная или как директивная);

2) построение такой системы показателей хозяйственной деятельности, чтобы основанная на ней система стимулирования и ответственности за принятые решения, или, говоря словами В. С. Немчинова [6, стр. 15], *система «нормативов длительного действия, устанавливаемых соответствующим экономическим законодательством»,* не вызывала тенденций к отклонению от оптимального режима, или оптимального плана, когда вся информация об оптимальном плане уже выработана, и стимулировала бы выработку новой полезной информации (экономической и технической);

3) обеспечение эффективности тех стимулов, которые заставляют руководителей хозяйства на всех уровнях хозяйственной иерархии стремиться к улучшению хозяйственной деятельности, в частности к максимизации тех показателей, о которых говорится в предыдущем пункте.

Первому кругу вопросов посвящена большая часть настоящей работы. Что касается системы показателей хозяйственной деятельности, то, как уже говорилось, математически доказана принципиальная возможность при широких условиях построить такую систему на основе хозрасчетных отношений. Более подробно этот вопрос обсуждается в разделе IV.

Возможность применения экономико-математических моделей и методов для изучения этой группы вопросов основывается на выделении следующих двух аспектов исследования. Каждое звено, или подсистема, системы экономического планирования и управления вырабатывает определенную информацию, отвечает за принятие тех или иных решений, выполняет определенную функцию управления, необходимую с точки зрения всей системы. Может ставиться вопрос о правильности выполнения звеном, или подсистемой, своей функции и принципов, которые лежат в основе методов, алгоритма работы, вообще о совершенствовании работы этого звена, или подсистемы, на основе новых достижений науки, применения новой техники переработки информации и т. д. С другой стороны, принципы, лежащие в основе деятельности звена или подсистемы, могут приниматься как заданные, совершенствование которых на данном этапе невозможно в силу тех или иных причин, и должны выступать как объективные, внешние условия при анализе работы других звеньев и подсистем.

Во втором случае внимание направляется на оптимизацию механизмов взаимодействия данного звена с другими звеньями и подсистемами и на оптимизацию работы других подсистем, а работа данного звена признается на данном этапе неулучшаемой, т. е. оптимальной при существующем состоянии науки и техники, общего уровня планирования и т. д.

В отношении третьей проблемы важную роль играет материальное поощрение. Однако было бы неверно сводить этот вопрос только к распределению переменной части заработной платы в соответствии с хозяйственными результатами.

Еще более важное значение имеет вопрос, поставленный профессором А. М. Бирманом [2], о том, что рыночный механизм должен обеспечивать неотвратимость последствий плохого хозяйствования. Практика хозяйственного управления у нас и за рубежом дает обширный материал для анализа этой проблемы как ключевой проблемы политической экономии социализма и связана также с социально-экономическими вопросами. Однако ее обсуждение не входит в задачу настоящей работы.

---

[2] «Литературная газета», 1967, № 2.

3⁰. Описание народного хозяйства с помощью системы взаимосвязанных экономико-математических моделей

Основным инструментом для математического изучения хозяйства и для проведения плановых расчетов служит *описание экономики с помощью системы взаимосвязанных экономико-математических моделей.* Теоретически народное хозяйство можно представить как единый объект оптимального регулирования, который может быть описан с помощью единой математической модели оптимизации. Однако ввиду большой сложности экономической системы наиболее плодотворный путь ее детального изучения и совершенствования состоит в представлении этой единой модели в виде комплекса подмоделей, отвечающих более или менее автономным подсистемам экономической системы.

Такое разложение дает возможность проводить расчеты плана и анализировать соответствие модели и полученных результатов с реальными условиями отдельно для каждой хозяйственной единицы. При этом оптимальный план для всей системы (например, отрасли) может быть получен в результате *итеративного процесса корректировки планов* отдельных подсистем (например, предприятий) в соответствии с общим критерием оптимальности и ограничениями всей системы.

Система моделей должна иметь *многоступенчатую иерархическую структуру,* отражающую подчиненность систем управления как части и целого, так что модель более высокого уровня иерархии представляет собой комплекс взаимосвязанных моделей входящих в него подсистем. Кроме того, как правило, каждый уровень иерархии должен иметь упрощенную модель в укрупненных показателях, которая согласуется в процессе функционирования с детализованными моделями входящих в него подсистем.

За основу при построении системы моделей может быть принята существующая структура управления хозяйством. В процессе совершенствования системы управления, в частности при внедрении моделей и методов оптимального планирования, эта структура и само определение границ конкретных хозяйственных объектов и функций управляющих органов должны уточняться.

Структура системы моделей должна отражать структуру хозяйственных связей и специфику различных задач планирования и управления. В частности, модели планирования и управления отдельными хозяйственными комплексами обладают различной спецификой в зависимости от временного, технологического и территориального факторов.

Во временном аспекте, как правило, различной спецификой обладают модели перспективного планирования и оперативного управления.

В технологическом аспекте структура системы моделей может отражать реальное упорядочение стадий производства по глубине обработки исходного сырья (см. 22°).

Применение экономико-математических моделей — основной метод теории и практики оптимального планирования. Однако это не значит, что математическая формализация всех звеньев системы экономического управления — необходимое условие оптимальности. Часть решений в системе оптимального планирования и управления всегда будет приниматься звеньями и подсистемами, работа которых не формализована, не математизирована полностью, что имеет особенно большое значение в отношении социальных аспектов экономики, в частности для количественного определения потребностей общества, сопоставления их настоятельности и распределения ограниченных ресурсов для их удовлетворения. Это не мешает анализировать и совершенствовать механизм оптимального планирования и утверждать, что выработанный план оптимален в той мере, в какой эти неформализованные функции экономической системы выполняются оптимально (см. 2°).

В качестве примера может служить определение личных потребностей членов общества и распределение благ между ними. Важную роль в осуществлении этих функций играет товарно-денежный механизм (см. 10°), и пока нет экономического механизма, который позволил бы его заменить в этом отношении. Товарно-денежный механизм дает возможность всем членам общества принимать участие в определении своих индивидуальных потребностей в форме потребительского выбора.

Платежеспособный спрос есть выражение коллективного опыта всей совокупности потребителей по опреде-

лению своих потребностей. В то же время государство может с помощью изменения розничных цен, пропаганды рациональных норм потребления и других средств воздействовать на выбор потребителя в тех случаях, где такое воздействие диктуется бесспорными научными или этическими соображениями (например, ограничение потребления алкогольных напитков и т. п.).

С другой стороны, система распределения заработной платы, общественных фондов потребления и других денежных доходов позволяет установить с помощью товарно-денежного механизма такое распределение общественных благ среди членов общества, которое отвечает требованиям стимулирования повышения квалификации и эффективности труда (закон распределения по труду) и различным другим социальным требованиям. Очевидно, в этих условиях, не считая средств целевого назначения (например, детские сады и ясли), мерой количества благ, которое общество считает целесообразным выделить своим членам, должен являться их доход.

Все это говорит о том, что в изучении потребления важнейшим направлением экономической науки также должны являться *анализ и совершенствование действия товарно-денежного механизма на основе статистического моделирования поведения потребителя*, т. е. на основе изучения реакции потребителя на изменение условий, в которых он действует (например, дохода и розничных цен).

Еще большее значение имеет представление о наличии неформализованных блоков в системе для проблемы поэтапного внедрения новых методов и систем планирования и управления (см. 32°).

Представление функционирования системы экономического управления как процесса взаимодействия подсистем, обладающих относительной автономностью, может служить теоретической основой и удобным языком для описания и изучения работы системы, содержащей неформализованные блоки. Наиболее естественным математическим языком для такого описания является язык теории игр (см. 13° и 16°). Следует отметить определенную близость намеченного здесь подхода к логическому описанию экономической системы и попытки Е. Е. Слуцкого [17] построения системы понятий для формально-праксеологического описания экономики.

II. МОДЕЛИ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА[1]

Цель разработки экономико-математических моделей — совершенствование системы планирования и управления народным хозяйством. Это означает, что при построении моделей производства в качестве исходных данных должны использоваться технологические связи, а методы и структура управления считаются искомыми и должны совершенствоваться в соответствии с внедрением экономико-математических методов и вычислительной техники.

Основное назначение экономической системы — удовлетворение материальных потребностей общества. Поэтому система моделей должна опираться в первую очередь на систему показателей, характеризующих количества производимых и затрачиваемых ресурсов.

4⁰. О стандартизации моделей

Теоретически общая модель производственных возможностей народного хозяйства может мыслиться в виде математического описания всех технологических операций, как применяющихся в настоящее время, так и возможных с точки зрения современного состояния науки и техники, с указанием необходимых для их реализации капитальных и текущих затрат, допустимых сроков

---

[1] Чтобы сосредоточить внимание на основных принципиальных вопросах, при описании системы моделей в настоящей работе не учитывается роль территориального размещения и транспортировки, как если бы все хозяйство было локализовано в одном месте.

и т. д., а также балансовых ограничений по производству и использованию всех ресурсов во все будущие моменты времени.

Однако серьезного продвижения в смысле теоретического и экспериментального изучения и особенно внедрения в практику планирования нелинейных моделей, очевидно, можно ожидать только в том случае, если будет выявлено несколько математических схем, достаточно универсальных и в то же время достаточно простых.

Они должны позволить, с одной стороны, замоделировать некоторый круг важных задач планирования и, с другой стороны, быть по возможности легко обозримы и удобны для теоретического анализа, алгоритмизации и сбора информации. Другими словами, необходима специализация и стандартизация моделей.

По-видимому, одной из существенных причин бурного развития теории и практики оптимального планирования явилось осознание именно этих свойств общей схемы линейного программирования. Эти же свойства определили общее доминирующее положение линейных моделей в настоящее время. Можно провести параллель также с развитием вычислительной техники, где прогресс был связан с осознанием больших преимуществ цифровых (а не аналоговых) машин, основанных на дихотомической логической схеме.

Давно известно, что модели линейного программирования не всегда оказываются адекватными реальным хозяйственным условиям. Возможность достаточно точного описания экономических процессов с помощью таких моделей обусловливается тем, что во многих ситуациях можно пренебречь такими факторами, как дискретность величин, нелинейность (и невыпуклость) зависимостей между ними, стохастические колебания исходных данных задачи и т. д. Такое пренебрежение, как правило, допустимо в условиях годового или месячного, т. е. текущего, планирования.

При конструировании моделей перспективного планирования и моделей оперативного управления предположения такого рода оказываются существенно неадекватными действительным техническим и экономическим условиям. Так, например, при формулировке задач оптимального перспективного развития на уровне отрасли производства характер нелинейности в существующих

моделях оптимального перспективного развития на уровне отрасли, в частности в задачах размещения, как правило, приводит к задачам с многими относительными экстремумами. Основная причина этого — невозможность игнорирования дискретным характером переменных. Определенные размеры предприятия или величина постоянных затрат на производство заставляют вводить в модели целочисленные переменные (например, логические переменные «строить — не строить»). На более высоких уровнях планирования, для которых элементарными единицами являются отрасли производства, снова оказывается возможным применение линейных и близких к линейным моделей с непрерывно меняющимися переменными, так как дискретностью и нелинейностью можно пренебречь ввиду большого количества объектов, входящих в отрасль. Для конструирования таких моделей, как и для конструирования моделей перспективного планирования с дискретными переменными, поддающихся расчету и анализу, необходимо использование укрупненных показателей типа валового продукта отрасли или объема товарной продукции, себестоимости продукции и т. д.

В задачах оперативного управления применение моделей линейного и выпуклого программирования наталкивается на гигантское возрастание сложностей задачи, обусловленное случайными возмущениями (например, непредвиденные ремонты оборудования, срывы поставки сырья и материалов и др.), целочисленностью (задачи расписания на машиностроительных заводах) и т. д.[2]

Довольно многочисленные работы по оптимальному текущему и перспективному планированию, проводимые в настоящее время, видимо, дают основание сделать вывод о том, что в отношении стандартизации моделей важнейшее значение имеет временной фактор.

Для задач текущего планирования, как правило, годятся модели линейного программирования.

---

[2] Этому соответствует резкое возрастание трудностей в математической теории оптимизации при переходе от векторного конечномерного пространства к пространству функций (теория оптимального управления и т. д.). В классической математической теории эти трудности преодолеваются с помощью определенных предположений, гарантирующих хорошие локальные свойства траекторий.

Для задач перспективного планирования (специализации и размещения) в масштабах отрасли или группы отраслей производства применяются модели с линейными ограничениями, в которых переменные подчиняются условию целочисленности (в основном ноль — единица, например «строить — не строить»).

В моделях масштаба всего народного хозяйства вследствие укрупненного статистического характера показателей снова могут быть применимы модели и методы линейного и выпуклого программирования.

5⁰. Система моделей текущего планирования производства

Наиболее теоретически разработанной областью следует считать *модели текущего планирования.* Это связано в первую очередь с тем, что для этих моделей, как правило, хорошо подходит схема линейного программирования, обладающая рядом существенных преимуществ с точки зрения как теоретического анализа, так и вычислительных методов. Как правило, эти модели укладываются в следующую схему.

Существуют различные производственные способы, которые характеризуются определенными нормами затрат и выпуска различных видов ресурсов (сырья и продукции) в единицу времени. Каждый из способов характеризуется также использованием оборудования и рабочей силы — затратами времени работы одного или нескольких видов оборудования и работников одного или нескольких видов квалификации. Мы для простоты абстрагируемся от учета затрат таких ресурсов, как земля и другие природные богатства, хотя в принципе они также в большинстве случаев могут быть учтены по схеме, описанной выше.

Одни продукты считаются внешними по отношению к данному комплексу (входящими или выходящими), а другие — внутренними (использование которых в других хозяйственных комплексах невозможно или заведомо нецелесообразно). Если имеется в виду модель планирования на достаточно длительный период, то применением запасов промежуточных продуктов и неодновременностью затрат и выпуска (т. е. длительностью производ-

ственного цикла) можно пренебречь. Модель записывается следующим образом:

$$\text{а) } ax = y,$$
$$\text{б) } bx \geqslant 0, \qquad \text{(II.1)}$$
$$\text{в) } cx \leqslant m,$$
$$\text{г) } x \geqslant 0,$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — вектор интенсивностей производственных способов;

$a = (a_{ij})$ — матрица выпуска (или затрат, если соответствующий элемент отрицателен) внешних ресурсов на единицу интенсивности разных производственных способов;

$b = (b_{ij})$ — матрица выпуска (и затрат) промежуточных продуктов;

$c = (c_{ij})$ — матрица затрат времени работы различных видов оборудования и затрат труда работников данного производственного комплекса (различных квалификаций) [3];

$m = (m_1, \ldots, m_R)$ — ресурсы труда и времени работы оборудования. В целом будем называть третью группу (b) ограничений (II.1) ограничениями по производственным мощностям;

$y = (y_1, \ldots, y_I)$ — вектор общего количества выпуска и затрат (в зависимости от знака соответствующей компоненты y) внешних ресурсов.

При этом величины a, b, c, m считаются заданными, не зависящими от интенсивностей x (искомых) и конечного выпуска и затрат y.

---

[3] Для простоты будем рассматривать только случай постоянного контингента работников и учета труда как постоянных затрат. Если в качестве меры труда принимается заработная плата работников, такой способ учета труда соответствует повременной системе заработной платы. В общем случае следует, кроме того, учитывать переменные затраты труда в той же форме, как и другие переменные текущие затраты (затраты внешних ресурсов). Такой способ применен при конструировании модели в укрупненных показателях в 26°.

Здесь и в дальнейшем знак неравенства между векторами означает покомпонентное неравенство.

Таким образом, модель производственного комплекса содержит три группы ограничений:

1) по мощностям наличного оборудования,

2) балансы промежуточных продуктов (полуфабрикатов),

3) зависимости входящих и выходящих продуктов от интенсивностей производственных способов.

При этом ограничения по мощностям, матрицы затрат труда и времени работы оборудования, затрат и выпуска ресурсов и продукции считаются заданными и не зависящими от интенсивностей и затрат и выпуска внешних (искомых) ресурсов.

Указанные ограничения естественно назвать *технологическими ограничениями,* или допустимым множеством. Они не могут быть сняты в течение небольшого периода планирования. Критерий оптимальности есть некоторая функция от входа и выхода, зависящая, вообще говоря, от состояния всех подсистем, связанных с данной.

При решении задачи на оптимум принимается та или иная аппроксимация этой функции, которая затем уточняется в процессе итераций. Обычно достаточными оказываются следующие подходы ее аппроксимации. Одни внешние ресурсы считаются *лимитированными*, для них указываются (и затем уточняются) ограничения в виде лимитов использования сырья или минимальных заданий по выпуску продукции. Для остальных внешних (нелимитированных) ресурсов устанавливаются (и затем уточняются) оценки (или цены), которые используются для построения линейного критерия (максимизации прибыли). Нелимитированными следует считать те ресурсы, спрос или предложение которых может значительно изменяться при относительно небольших изменениях цены (эластичный спрос), лимитированными — ресурсы с неэластичным спросом (или предложением). Установление лимитов по использованию и заданий по выпуску внешних ресурсов (с последующим их уточнением в итеративном процессе последовательного улучшения плана) удобно рассматривать как формирование элементов критерия, поскольку эти ограничения носят условный характер и не определяются внутренними условиями моделируемой системы. Чтобы выявить и использовать это свойство, ча-

сто бывает удобно ослабить жесткость этих ограничений, допустив их нарушение и установив значительные штрафы за такое нарушение.

Другая схема аппроксимации критерия по нелимитированным ресурсам — задание пропорций выпуска продукции (критерий максимизации числа комплектов продукции, см. 17⁰). Принципиальная схема описания хозяйства с использованием такой формы локальных критериев дана в [16, 19]. Возможны, очевидно, любые комбинации этих двух подходов при аппроксимации критерия.

Нецелесообразно ограничивать критерий оптимальности одной единственной формой (например, линейной — максимизация прибыли), когда речь идет о построении расчетных моделей. Вид критерия оптимальности, как и других элементов модели, должен выбираться с учетом требования обеспечения наибольшей автономности модели, которая зависит от устойчивости ее исходных данных. Возьмем в качестве примера отрасль нефтепереработки. В силу того что нефтепродукты в большой мере взаимозаменяемы другими видами топлива, следует ожидать, что их цены (оценки в общей системе моделей) достаточно устойчивы. Наоборот, светлые нефтепродукты почти невзаимозаменяемы, и потребность в них определяется объемом работы нескольких видов транспорта и сельскохозяйственной техники. Естественно ожидать статической устойчивости от этой величины и в модели установить задания по выпуску бензинов, дизельного топлива и керосина. За критерий оптимальности, отвлекаясь от остальных факторов, можно принять максимизацию валового выпуска темных нефтепродуктов, рассчитанного в заданных ценах (при условии выполнения заданий по выпуску светлых).

С другой стороны, возьмем в качестве примера модель одного из цехов машиностроительного предприятия, продукция которого является составной частью какого-то агрегата. В этом случае устойчивой будет комплектность составных частей, которая и должна лечь в основу разработки критерия. При этом оценки отдельных видов изделий могут оказаться неустойчивыми в силу скачкообразного характера изменения мощностей по различным видам оборудования или по производству отдельных видов изделий, вызывающих диспропорции, наличие узких мест и неполной загрузки других видов оборудования.

Конструирование модели системы из моделей подсистем (модели более высокого уровня иерархии из моделей низшего уровня иерархии) можно представлять следующим образом. Назовем это для краткости *операцией объединения моделей.* Модель системы состоит из всех показателей интенсивностей, всех ограничений по мощности оборудования и по балансировке промежуточных продуктов, которые входят хотя бы в одну модель подсистемы. Часть наименований ресурсов и продукции, составляющих входы и выходы подсистем, становятся промежуточными продуктами в системе, так что балансы по этим продуктам составляют дополнительные ограничения в модели системы по сравнению с ограничениями в моделях подсистем. Форма критериев оптимальности в моделях подсистем определяется в соответствии с принципом обеспечения их наибольшей автономности и с алгоритмом расчета по модели всей системы и корректируется в процессе решения.

Операция объединения моделей дает возможность переходить от моделей низших уровней иерархии к высшим и в конце концов сконструировать общую модель текущего планирования производства, внешними ресурсами которой оказываются только предметы непроизводственного потребления, экспорт и импорт и накопляемые блага (конечный продукт).

6⁰. Возрастание сложности при применении моделей оптимального программирования в оперативном управлении производством

Как уже говорилось, описанная выше схема, по-видимому, более всего подходит для задач текущего планирования (от месяца до года). При переходе к более краткосрочному планированию и оперативному управлению такая схема оказывается практически непригодной.

Не говоря уже о задачах типа задач расписания, которые возникают при оперативном управлении в условиях дискретного производства (определение очередности обработки деталей на различных станках), даже в условиях непрерывного производства, где применение моделей линейного программирования в принципе закономерно, возрастание размерности задач при попытке

учесть возникающие усложнения приводит к необходимости искать другие приемы решения (см., например, [20]).

Одна из причин усложнения ситуации — необходимость учета изменения ограничений по мощностям оборудования вследствие запланированных и непредвиденных остановок на ремонт технологических установок и агрегатов. Естественно пытаться обойти эту трудность, разбивая плановый период на такие отрезки времени, в течение которых не происходит существенных изменений (остановка на ремонт или окончание ремонта установки), и составляя модель в виде сочленения моделей типа (II. 1), усложненных введением переходящих остатков. Однако при этом теряется основное достоинство моделей текущего планирования — возможность пренебрегать изменениями запасов промежуточных продуктов, что резко сокращает размерность задачи. Даже в случае учета только запланированных остановок на ремонт это может сделать размерность слишком большой. Кроме того, эти модели могут оказаться неадекватными реальности, так как влияние случайных факторов (непредвиденные ремонты оборудования, неравномерность поставки материалов и т. д.) может быть соизмеримо с влиянием учтенных факторов. Во всяком случае, вопрос о сфере практической целесообразности применения таких моделей в оперативном управлении нельзя считать решенным.

По-видимому, основной путь решения задач оперативного управления состоит в разработке существенно вероятностных моделей, как, например, модели управления запасами, теория расписаний и другие методы моделирования, с учетом стохастических факторов.

7°. Модели перспективного планирования

Как правило, при осуществлении каждого определенного варианта капитальных вложений (например, проекта строительства нового предприятия или реконструкции старого) можно считать известными затраты различных ресурсов на проведение отдельных работ и их распределение во времени после начала строительства (или вообще с момента начала осуществления проекта), а так-

же сроки ввода в действие отдельных частей (например, цехов, установок) и их освоения. Если определен список предприятий, которые намечено построить в данный период, и сроки начала строительства, то определены также ограничения по производственным возможностям и необходимые затраты, которые могут быть использованы как ограничения для построения моделей типа (II. 1) для всего народного хозяйства на все годы или все месяцы рассматриваемого периода. После разработки критерия оптимальности как функции показателей непроизводственного потребления задача сведется к решению динамической задачи планирования, состоящей из моделей типа (II. 1) для каждого периода, связанных общим критерием оптимальности и балансовыми ограничениями с учетом остатков, переходящих из периода в период.

Однако решение такой задачи не дает еще оптимального плана, так как не производился выбор оптимальных вариантов капитальных вложений и сроков их осуществления (сроков начала строительства). Чтобы включить в оптимизацию выбор вариантов капитальных вложений и сроков их осуществления, можно схематически описать общую задачу следующим образом. Будем считать, что j-й вариант капитальных вложений характеризуется моментом θ_j начала осуществления и определенной векторной функцией времени $m_j(\tau)$, которая характеризует прирост мощности во времени, отсчитываемом от момента начала осуществления этого варианта. Для $\tau<0$ полагаем $m_j(\tau)=0$. Тогда вектор ограничений по производственным мощностям в момент t может быть записан как

$$m(t)=m(0)+\sum_j m_j(t-\theta_j)\,\delta_j, \qquad (II.2)$$

где δ_j — величина, принимающая значение 1, если вариант принимается к осуществлению, и 0 — в противоположном случае (логическая переменная). Для простоты изложения будем считать матрицы a, b, c не зависящими от времени. (В общем случае можно эти матрицы также считать зависящими от времени и от начала θ_j осуществления проекта строительства или реконструкции.)

Обозначим через $v_j(\tau)$ вектор затрат на осуществление проекта в период (год) τ после момента θ_j (для $\tau<0$ полагаем $v_j(\tau)=0$). Тогда общие затраты на создание производ-

ственных мощностей в год t составят

$$v(t) = \sum_j v_j(t - \theta_j)\,\delta_j. \qquad \text{(II.3)}$$

В число необходимых затрат при этом должны быть включены не только затраты на основные средства, но и нормативные объемы оборотных средств.

По тому же типу должны учитываться все текущие постоянные затраты, связанные с эксплуатацией данного производственного комплекса. Для этого их необходимо наряду с капитальными затратами на создание производственных мощностей включить в вектор $v_j\ (t - \theta_j)$.

Очевидно, по такой схеме может быть учтена также возможность ликвидации действующих предприятий.

Теперь рассмотрим модель типа (II.1) для всего народного хозяйства в год t:

$$\begin{gathered} ax(t) = v(t) + \Delta z_k(t) + \Lambda(t), \\ bx(t) \geqslant \Delta z_n(t), \\ cx(t) \leqslant m(t), \\ x(t),\ z_n(t),\ z_k(t) \geqslant 0, \end{gathered} \qquad \text{(II.4)}$$

где $\Delta z_n(t)$, $\Delta z_k(t)$ — прирост сверхнормативных остатков (запасов) промежуточных и конечных (внешних) ресурсов за период $(t, t+1)$, например $\Delta z_k(t) = z_k(t+1) - z_k(t)$, и $z_n(t)$, $z_k(t)$ — остатки на начало периода $(t, t+1)$. Затраты и выпуск внешних ресурсов — вектор $y(t)$ — представлены в виде трех слагаемых: вектора $v(t)$ — необходимые затраты на осуществление запланированных капиталовложений для увеличения производственных мощностей, вектора $\Delta z_k(t)$ и вектора $\Lambda(t)$ — затраты ресурсов, внешних по отношению ко всей производственной системе (все непроизводственное потребление и сальдо внешней торговли). Для простоты изложения будем считать систему замкнутой, т. е. предполагать отсутствие внешней торговли. Тогда $\Lambda(t)$ будет совпадать с вектором ресурсов для непроизводственного потребления. Условимся в число компонент векторов $v_j(\tau)$ не включать затраты труда и природных ресурсов. Обозначим изменение потребности в рабочей силе (различных категорий или по различным районам) для j-го варианта (объекта) капиталовложений через вектор $l_j(\tau)$. Тогда общая потребность в рабочей силе

в год t выразится вектором

$$l(t) = l(0) + \sum_{l} l_l (t - \theta_l)\, \delta_l, \qquad \text{(II.5)}$$

где $l(0)$ — количество рабочей силы (вектор), занятой в момент 0. Если общая численность работников различных категорий (или по разным районам) выражается вектором $L(t)$, то ограничения по рабочей силе могут быть записаны в виде

$$l(t) \leqslant L(t). \qquad \text{(II.6)}$$

В принципе аналогично могут быть учтены ограничения по земле и другим природным ресурсам.

Модель, состоящая из ограничений (II.2—II.6) для периодов $t = 0, 1, \ldots, T$ с неизвестными δ_j, θ_j, $x(t)$, $Z(t)$, $\Lambda(t)$, дополненная критерием оптимальности как функционалом от векторов $\Lambda(t)$, $t = 0, 1, \ldots, T$, теоретически может быть построена для любого как угодно большого значения T.

В силу ненадежности информации о развитии экономической системы в отдаленном будущем (скажем, через 50 лет) прогноз на такую далекую перспективу практически не может влиять на конкретные плановые решения, принимаемые в настоящий момент, за исключением, может быть, отдельных альтернатив, не имеющих существенного значения для планирования. Чтобы отражать этот факт, модель планирования должна обладать следующим свойством: если T достаточно велико, то его дальнейшее увеличение практически не влияет на показатели плана и оценок, относящиеся к первым периодам, скажем для $t \leqslant T_0$, где T_0 — постоянное. Для простых моделей, типа динамического варианта модели Неймана, этот факт может быть доказан математически при естественных предположениях.

Таким образом, принципиальной схемой для расчета оптимального плана может служить описанная выше модель, построенная для длительного периода T. Такая модель даст возможность получить довольно точное приближение к оптимальным значениям показателей, относящихся к ближайшим годам, и этого достаточно, так как расчеты по такой модели должны повторяться регулярно для уточнения решений, намеченных раньше, с учетом новой информации (*непрерывное планирование*).

Для практического приложения сформулированное выше свойство лучше перефразировать так: ошибки в прогнозе элементов модели, относящихся к отдаленным во времени периодам, оказывают слабое влияние на увеличение ошибок в решениях, относящихся к периодам, близким во времени. Этот принцип позволяет применять очень удобный прием построения перспективного плана. При каждом расчете все достаточно детальные показатели плана рассчитываются только на период в несколько ближайших лет (плановый период), а показатели послепланового периода рассчитываются по простейшим моделям, основанным на грубых предположениях, с целью получить приемлемые краевые условия на конец планового периода.

Если нет более обоснованных предположений, то краевые условия можно получить, предполагая, что в послеплановый период должны сохраниться те тенденции, которые наметились в развитии хозяйства в плановом периоде. Например, можно предположить, что в послеплановый период каждая отрасль хозяйства будет развиваться с постоянным темпом, равным среднему темпу ее роста в плановом периоде, и в соответствии с этим намечать необходимые капитальные затраты на последние годы планового периода (см. 25⁰).

Длина планового периода определяется, с одной стороны, средней длительностью строительства объектов, а с другой — неопределенностью, возрастающей по мере удаления в будущее. Практика планирования показывает, что длина планового периода должна выбираться равной пяти-десяти годам.

8⁰. Модели оптимального планирования развития отрасли производства

Модель перспективного планирования развития производственного комплекса рассмотрим на примере отрасли. Каждое из существующих или вновь строящихся предприятий (объектов) представляется несколькими вариантами (проектами) реконструкции или строительства. Для каждого варианта считаются заданными все характеристики соответствующих ему производственных мощностей, длительность строительства или реконструкции и затраты ресурсов (продукции отраслей строительства

и машиностроения) на его осуществление. Искомыми являются номер варианта (проекта) для каждого объекта и срок начала или окончания его реализации (задача целочисленного программирования). Критерии могут быть выбраны, например, следующие:

1) минимизация затрат в заданных оценках, приведенных к одному моменту времени, как описано в [2], при условии выполнения заданных объемов производства основных видов продукции по годам планового периода;

2) максимизация прибыли, приведенной к одному моменту времени при соблюдении лимитов по строительно-монтажным работам и закупкам оборудования по годам планового периода (возможно, еще при соблюдении заданных пропорций выпуска продукции).

Эта общая модель может быть разделена на две взаимосвязанные модели, одна из которых представляет собой задачу определения оптимального варианта для каждого объекта, а вторая — сроки их реализации.

Модели перспективного и текущего планирования должны быть связаны между собой в итеративном процессе улучшения плана. Показатели плана производства и оценки, полученные при расчете моделей текущего планирования на базовый год и будущие периоды времени, должны явиться основой для формирования и прогноза исходных данных для модели перспективного планирования. После расчета модели перспективного планирования эти прогнозы и рациональность предполагаемой специализации могут быть уточнены путем расчетов моделей текущего плана на все годы или на последний год планируемого периода с показателями производственных мощностей предприятий, получаемых из модели перспективного планирования.

Если модели текущего перспективного планирования отработаны и вычислительная техника позволит произвести расчеты по ним в короткие сроки, то можно осуществлять много таких итераций по взаимному уточнению моделей при расчете каждого плана.

Опыт постановки и расчета большого числа задач оптимального развития и специализации производства (см., например, [9]) позволил сформулировать достаточно общую и удобную стандартную форму постановки задачи выбора оптимальных вариантов строительства и рекон-

струкции предприятий отрасли: минимизации общих приведенных затрат при условии достижения заданных мощностей по производству основных видов продукции отрасли в конце планового периода [9]. Модель сводится к следующей задаче линейного целочисленного программирования:

$$\sum_{j,k} Z_j^k \delta_j^k = \min,$$

$$\sum_{j,k} a_{ij}^k \delta_j^k \geqslant m_i, \qquad \text{(II.7)}$$

$$\sum_j \delta_j^k = 1, \quad \delta_j^k = 0 \text{ или } 1,$$

где k — номер объекта (предприятия): $k = 1, \ldots, N$;
j — номер варианта его развития: $j = 1, \ldots, n_k$;
i — номер вида продукции: $i = 1, \ldots, I$;
a_{ij}^k — возможности выпуска i-го вида продукции в последний год планового периода на k-м объекте при j-м варианте его развития;
m_i — потребность народного хозяйства в i-м виде продукции отрасли в последнем году планового периода, или задания по общему развитию производственных мощностей;
Z_j^k — сумма приведенных капитальных и текущих затрат по k-му предприятию при j-м варианте его развития;
$\delta_j^k = 1$ — если принимается j-й вариант развития k-го предприятия;
$\delta_j^k = 0$ — в остальных случаях.

Коэффициенты a_{ij}^k получаются из проектов развития предприятия, величины m_i и Z_j получаются и уточняются при решении других моделей перспективного планирования.

Модели определения оптимальных сроков осуществления различных вариантов строительства и реконструкции предприятий до сих пор почти не разрабатывались. Рассмотрим постановку задачи на минимизацию приведенных затрат при условии выполнения заданий на выпуск продукции по годам планового периода [21].

Пусть выбраны определенные варианты строительства и реконструкции для каждого объекта. Предполагаем, что заданы длительности строительства (реконструк-

ции) каждого объекта и распределение необходимых затрат различных ресурсов по годам строительства. В укрупненных показателях можно ограничиться двумя показателями затрат: объемом строительно-монтажных работ и затратами на оборудование, подлежащее монтажу.

Обозначим $v_i^k(\tau)$ затраты i-го вида ресурсов для k-го объекта на τ-й год строительства. Предположим, как и раньше, что выбранный вариант строительства или реконструкции каждого предприятия полностью определяет его специализацию, так что известны объемы a_j^k выпуска каждого вида продукции (j) по каждому предприятию. Если учесть неодновременность ввода в действие различных мощностей и время их освоения, то надо считать величину a_j^k зависящей от времени τ после начала строительства: $a_j^k(\tau)$. Обозначим теперь оценку i-го капитального ресурса в плановый год t через $Z_i(t)$ и задания по выпуску j-го вида продукции через $y(t)$, ожидаемую прибыль по k-му предприятию на τ-й год после начала его строительства (исчисленную в оптимальных оценках) — через $P^k(\tau)$. Тогда можно записать задачу в виде

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\sum_k P^k(t-\theta_k) - \sum_{i,k} Z_i(t)\, v_i^k(t-\theta_k)\right] = \max,$$

$$\sum_k a_j^k(t-\theta_k) \geqslant y_j(t) \qquad \text{(II.8)}$$

для всех j и $0 < t \leqslant T$. Здесь θ_k — искомые сроки начала строительства объектов; $[0, T]$ — плановый период. На величины θ_k могут быть еще наложены ограничения типа

$$\theta_k \geqslant \bar{\theta}_k,$$

которые отражают, например, реальные возможности машиностроительной промышленности по срокам выпуска необходимого уникального оборудования и т. д.

Задания $y_j(t)$ и оценки $Z_i(t)$ могут быть получены из моделей развития других отраслей хозяйства или из моделей всего народного хозяйства в укрупненных показателях.

Целевая функция (II.8) содержит сумму по всем периодам времени t до бесконечности. В 28^0 будет обоснован

переход от оценок $Z_i(t)$ ресурсов в перспективных моделях к (прогнозным) ценам $\hat{Z}_i(t)$ по формуле $\hat{Z}_i(t) = e^{\rho t} Z_i(t)$.

Если нормировочный коэффициент достаточно мало меняется с изменением t, то можно положить $e^{\rho} \equiv 1 + E$ (параметр E аналогичен единой норме эффективности). В этом случае критерий (II.8) принимает более привычный вид:

$$\varphi = \sum_{t=1}^{\infty} \left[\sum_k \hat{P}^k (t - \theta_k) - \sum_{i,k} \hat{Z}_i(t)\, v_i^k (t - \theta_k) \right] (1 - E)^{-t}, \tag{II.9}$$

где $\hat{P}^k(t - \theta_k)$ — ожидаемая прибыль k-го предприятия в год t в ценах $\hat{Z}_j(t)$.

Далее может быть сделано следующее упрощение. Можно предположить, что начиная с некоторого момента T_1 все прибыли $\hat{P}^k(t - \theta_k)$ не зависят от времени t, а все работы (и затраты), связанные со строительством или реконструкцией, окончены ($T_1 > T$). Тогда сумму (II.9) можно разбить на два слагаемых:

$$\varphi = \sum_{t=1}^{T_1} + \sum_{t=T_1+1}^{\infty},$$

из которых второе оказывается постоянной величиной

$$\frac{1}{E}(1 + E)^{-T_1} \sum_k \hat{P}_k$$

и при решении задачи может быть отброшено.

III. МОДЕЛИ ПОТРЕБЛЕНИЯ И КРИТЕРИИ ОПТИМАЛЬНОСТИ

9⁰. О критерии оптимальности

Представление об экономической системе как о системе оптимального планирования и управления предполагает существование критерия оптимальности, т. е. возможности единообразной оценки и сравнения различных планов.

Критерий оптимальности для экономической системы — максимальное удовлетворение потребностей. Однако научное определение общественных потребностей — очень сложный вопрос хотя бы потому, что общество не является единым и его члены могут иметь различное мнение о настоятельности и важности удовлетворения своих потребностей. Такое различие взглядов определяется как различием условий жизни и труда, так и психологическими и культурными различиями его членов. Поэтому вряд ли можно предполагать ликвидацию таких различий в будущем. В то же время интересы и взгляды различных людей и их групп, очевидно, должны учитываться не в одинаковой мере, так как их деятельность представляет различную ценность для общества. Особенно ярким примером, иллюстрирующим сложность проблемы, является вопрос о сопоставлении в критерии оптимальности интересов того поколения людей, которое живет в настоящее время, и будущих, еще не родившихся поколений (см. 11⁰), например при попытках построить критерий оптимальности в виде взвешенной средней из показателей уровня жизни в различные периоды времени и уровня жизни различных поколений (см. [3, 12]).

В силу этого особенно важное значение приобретает подход к описанию экономической системы, намеченный

в 2° и 3° и позволяющий концентрировать внимание на *изучении и совершенствовании экономических механизмов, в частности товарно-денежного механизма,* в определенной мере *независимо от решения спорных и неформализуемых вопросов о целях человеческого общества.* Математическая постановка задачи нахождения оптимума обычно состоит в задании ограничений и целевой функции, экстремум которой ищется. Как известно, для нахождения экстремума функции нет необходимости иметь ее полное математическое выражение. Достаточно, например, иметь механизм, определяющий ее градиент в любой точке пространства, и в соответствии с этим алгоритм ее движения. При этом нет необходимости знать, как именно определяет механизм значение градиента («черный ящик»).

Указанную возможность аппроксимации критерия оптимальности линейной функцией и последовательного уточнения коэффициентов этой линейной функции в ходе разработки и реализации оптимального плана можно интерпретировать как задание критерия оптимальности в виде максимизации общего объема непроизводственного потребления, рассчитанного в оптимальных оценках, или в ценах равновесия, приведенных к одному моменту времени. Однако применение критерия оптимальности в таком виде означает, что необходимо иметь хороший прогноз оптимальных оценок, или цен равновесия, и прогноз спроса со стороны непроизводственной сферы с учетом ожидаемой динамики цен и проделать несколько итераций для нахождения точки равновесия.

Фактически дело сводится к тому, что составление любого народнохозяйственного плана заключается в разработке плана производства и плана непроизводственного потребления. Моделирование непроизводственной сферы — гораздо менее разработанная область науки, чем моделирование производства. Это связано как с принципиальными трудностями и недостаточным развитием таких наук, как биология, психология, социология и т. д., так и с недостаточным вниманием к этой проблеме. Исследования по разработке моделей отдельных областей непроизводственной сферы, таких как здравоохранение, образование и т. д., давно ведутся за рубежом (см., например, [22]). В советской экономической науке эти исследования только начинаются (см., например, [23]).

Им явно не уделяется достаточного внимания, хотя они необходимы для возможности расчета и сопоставления большого числа вариантов плана с помощью ЭВМ и для сокращения области волюнтаризма в плановых решениях.

Однако независимо от принципов, которыми руководствуются органы планирования народнохозяйственного потребления, и от качества их работы предположим, что они при составлении плана ограничены общим фондом непроизводственного потребления и могут составить план, наилучший с точки зрения современного состояния науки и при современном уровне планирования. Эта операция, видимо, пока должна содержать элементы неформального решения, принимаемого опытными плановиками. Этот план, естественно, должен корректироваться при изменении цен на товары и услуги.

Из описания алгоритмов функционирования товарно-денежного механизма (см. 13^0 и 16^0) следует, что этот механизм можно рассматривать как алгоритм нахождения оптимума, при котором на каждой итерации производится корректировка цен с целью уравновесить планы производства и потребления, а органы планирования производства и непроизводственной сферы в свою очередь корректируют свои планы в соответствии с изменением цен.

Относительная автономность моделей различных подсистем планирования и управления и возможность согласования их решений в итеративном процессе позволяет раздельно изучать различные проблемы построения критерия, возникающие на разных уровнях управления.

Если говорить о практическом использовании представления критерия в виде линейной функции от объемов потребления при постановке задач перспективного планирования, то надо учесть, что даже при известной динамике оптимальных оценок решение модели оптимального развития производства будет неоднозначно, и полученные планы, вообще говоря, будут далеки от оптимума. Еще более далекие планы будут получаться вследствие неизбежных ошибок в прогнозе динамики цен. Отождествление критерия оптимальности с фондом непроизводственного потребления получает разумный смысл, если структура непроизводственного потребления считается заданной. Это оправдывается статистически

проверяемой устойчивостью во времени функций зависимости потребления от дохода (см., например, [24]), а также теоремой о сходимости к оптимуму процесса корректировки таких функций в зависимости от изменения цен (см. 17⁰). Это свидетельствует о целесообразности использования в укрупненных многоотраслевых моделях народного хозяйства критерия максимизации потребления в заданных пропорциях или некоторых форм нелинейных зависимостей потребления от одного показателя — общего фонда потребления. Более точно следует говорить о модели потребления в виде вектор-функции $\Lambda(f)$ объемов потребления различных благ от одного скалярного параметра f, который естественно считать показателем уровня потребления или реального дохода. Таким способом выбор оптимального варианта плана сводится к выбору конкретной функции изменения параметра f во времени (см. 11⁰).

Аналогично, если учитывать необходимость итеративного уточнения цен и структуры всего конечного продукта (потребления и накопления), то критерием оптимальности для текущего планирования может служить величина национального дохода или совокупного общественного продукта.

О возможности использования агрегатных показателей типа совокупного общественного продукта и т. п. более подробно см. в работе [25].

Процесс последовательного уточнения структуры потребления (заданных пропорций), описанный в 17⁰, может быть следующим образом интерпретирован как процесс составления народнохозяйственного плана.

Предположим, что модель производства полностью известна и описывает выпуклое множество допустимых планов и что целевая функция общественного потребления аппроксимируется (неизвестной нам) квадратичной функцией от вектора объемов ресурсов (материальные и трудовые затраты в сфере непроизводственного потребления). Будем называть этот вектор структурой потребления. Пусть на некоторой итерации получены цены (оценки) всех ресурсов.

Зададим два различных значения общего фонда непроизводственного потребления и найдем структуру потребления для этих двух вариантов (в заданных ценах). Если эти структуры потребления оптимальны для дан-

ных вариантов общего фонда потребления, то при любых других его значениях оптимальная структура потребления (при данной системе цен) будет лежать на прямой, соединяющей эти две точки (структуры потребления).

По модели производства найдем план и оценки, соответствующие максимальному значению фонда потребления при условии, что структура потребления лежит на найденной прямой. Новые оценки, полученные из производственной модели, могут быть использованы для уточнения цен (оценок), найденных раньше. После этого начинается следующая итерация.

Отметим, что описанный итеративный процесс обладает следующими достоинствами: план потребления на каждой итерации сбалансирован с планом производства, а соответствующие ему цены рассчитываются только на основе производственных моделей.

Для изучения вопроса о соизмерении ценностей во времени (см. 11⁰) можно использовать линейную форму критерия следующим образом. Пусть $f(t)$ — фонд непроизводственного потребления в год t в оптимальных текущих ценах и λ_t — коэффициент их приведения к одному моменту времени. Тогда критерий оптимальности может быть записан в виде:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \lambda_t f(t), \quad \text{или} \quad \int_{0}^{\infty} \lambda_t f(t)\, dt.$$

Структуру потребления в каждом году можно считать, например, заданной. Поскольку показатель $f(t)$ в силу своего обобщающего характера не должен сильно зависеть от колебаний цен, такое представление критерия не лишено содержания.

Если уровень цен в сфере непроизводственного потребления существенно понижается или повышается по сравнению с общим уровнем цен, связанным с коэффициентами λ_t приведения оценок к единому моменту времени (причем это повышение или понижение является искомой, а не известной величиной), то естественно выбирать в качестве показателя уровня потребления не фонд потребления в текущих ценах, а какую-либо другую характеристику. В этом случае линейная форма критерия оптимальности должна содержать в ка-

честве весовой функции (коэффициентов соизмерения во времени) не функцию λ_t, а некоторую другую функцию Q_t в зависимости от выбранного показателя потребления $f(t)$:

$$\sum_{t=0}^{\infty} Q_t f(t), \text{ или } \int_0^{\infty} Q_t f(t)\, dt. \qquad \text{(III.1)}$$

Такой вид критерия используется во многих теоретических исследованиях (см., например, [26, 27]).

В работе [3] предлагается использовать класс критериев вида (III.1) и ставится задача определения вида весовой функции Q_t в связи с разработкой других важнейших характеристик перспективного развития народного хозяйства.

Эти выводы важны в основном для исследования народнохозяйственных моделей в укрупненных показателях, поскольку можно ожидать значительной устойчивости функций $\Lambda(f)$ и коэффициентов соизмерения Q_t, так как они отражают достаточно устойчивые объективные свойства развития народного хозяйства.

10°. Моделирование личного потребления

В настоящее время наиболее распространена проблема создания модели оптимального планирования личного потребления.

Как уже говорилось в 3°, в условиях нормального функционирования экономической системы в настоящее время товарно-денежный механизм остается незаменимым инструментом, позволяющим заменить распределение многих видов материальных благ и услуг распределением одного «блага» — денежного дохода. Поэтому необходимый элемент любой модели личного потребления — статистическое моделирование поведения потребителя, т. е. реакция потребителя на изменение условий, в которых он действует (например, дохода и цен). Это не только дает формальный инструмент для осуществления любых принципов оптимальности путем воздействия на спрос, но, что еще важнее, дает в основном и решение проблемы содержания самого принципа оптимальности в той мере, в какой можно принять предположение, что поведение потреби-

теля отражает его стихийное (осознанное или неосознанное) стремление к наиболее полному удовлетворению потребностей. На более формальном языке это означает, что из всех доступных наборов потребительских благ совокупный потребитель отдает предпочтение одному набору, который считается оптимальным среди всех доступных.

Задача экономико-статистической науки состоит в выявлении и формализации этого предпочтения и сознательном стремлении к его максимизации. Это, конечно, не отрицает необходимости научного анализа потребностей общества и личных потребностей его членов методами биологии, психологии и, главное, социологии и необходимости регулирующего воздействия государства на выбор потребителя в тех случаях, где такое воздействие диктуется бесспорными научными или этическими соображениями (например, ограничение потребления алкогольных напитков и т. п.).

Наоборот, формализация предпочтения потребителя и построение на основе этого надежной модели его поведения даст в руки государства инструмент предсказания влияния на спрос изменения розничных цен, а следовательно, и средство эффективного воздействия на спрос.

Сформулированное выше предположение можно в основном принять, если считать, что сферой потребительского выбора является текущее личное потребление в пределах небольшого отрезка времени, так что вопросы планирования общественного потребления и разделения средств на текущее потребление и накопление (будущее потребление) в основном определяются не индивидуальным поведением членов общества, а решаются плановыми органами. *Из рассмотрения модели функционирования товарно-денежного механизма (см. 13°) при этом предположении следует, что его нормальное функционирование само по себе обеспечивает движение экономической системы к оптимуму (конечно, в указанной сфере и с учетом государственного регулирования).* Под нормальным функционированием понимается такой порядок изменения цен, при котором платежеспособный спрос полностью покрывается предложением цены равновесия, так что единственным ограничением для потребителя является его доход.

Кроме этого ограничения в действительности часто существуют ограничения, связанные с превышением спроса над предложением, вызываемым недостатками производства и снабжения, а также недостатками ценообразования.

С точки зрения тех задач, которые призван выполнять товарно-денежный механизм в сфере распределения, это положение нельзя признать нормальным. Действительно, в условиях насыщенного платежеспособного спроса количество реальных благ, получаемых каждым членом общества, определяется только его доходом и сравнительной настоятельностью потребности в них. В условиях хронической дефицитности многих товаров их распределение зависит в большой мере не от этих факторов, а, например, от возможности и желания тратить время на поиски нужного товара и т. д. Поэтому в этих случаях в более выгодном положении оказываются как раз те, кто принимает меньше участия в общественно полезном труде, т. е. распределение благ выходит из-под контроля общества. В результате можно сказать, что *наличие большого количества товаров и услуг, платежеспособный спрос на которые не покрывается предложением, подрывает принцип распределения по труду.* Отсюда следует вывод, что розничные цены, как правило, должны быть таковы, чтобы платежеспособный спрос совпадал с предложением (цены равновесия).

Таким образом, товарно-денежный механизм выступает как инструмент выработки и корректировки критерия оптимальности для текущего планирования и управления производством в смысле выработки оценок на предметы потребления, которые должны служить коэффициентами в линейном критерии максимизации прибыли.

Для перспективного планирования необходимо знать зависимость изменения спроса от изменения доходов и цен.

Основным фактором, определяющим изменения в структуре личного потребления, можно считать изменение дохода. Обычно розничные цены изменяются более медленно, чем доход. Это обусловливается как причинами социального порядка, заставляющими принимать меры по стабилизации цен и т. д., так и медленным

изменением структуры производства и потребления, которое обусловливает медленное изменение средних цен для укрупненных групп товаров, соответствующих продукции различных отраслей хозяйства. Связь постоянства цен с постоянством структуры производства убедительнее всего выявлена в известной модели Неймана пропорционального роста экономики.

Изучение зависимости спроса и потребления от дохода давно ведется в нашей стране разными методами (см., например, [29—31].

Однако в настоящее время первостепенную важность приобретает проблема определения зависимости спроса от изменения розничных цен. В первую очередь это определяется проводимым с 1967 г. значительным изменением оптовых цен. Хотя розничные цены при этом не изменяются, рано или поздно они должны быть приведены в соответствие с изменившимися оптовыми ценами. Изменения в системе розничных цен могут потребоваться для решения задачи ликвидации дефицитности некоторых товаров.

По-видимому, необходим период планомерного, целенаправленного изменения соотношений цен на различные группы товаров и услуг. Эти изменения должны проводиться по возможности постепенно. Однако они все же должны быть настолько значительны, что без специальных моделей, позволяющих рассчитать их влияние на спрос, можно ожидать больших просчетов в планировании производства предметов потребления.

Определение зависимости спроса от цен — более трудная задача. Если изменение спроса с изменением дохода можно характеризовать n коэффициентами эластичности, где n — число благ, то для учета влияния цен необходимо определить матрицу n^2 коэффициентов эластичности: от цен на тот же товар, спрос на который изучается (коэффициенты прямой эластичности), и от цен на другие товары (коэффициенты перекрестной эластичности). Как и в других вопросах изучения потребления, базой для такого изучения могут явиться, с одной стороны, материалы балансовых расчетов и торговой статистики, используемые как временны́е ряды, с другой стороны, — статистика бюджетных обследований. По-видимому, каждый из подходов необходим для решения проблемы надежного предсказания спроса.

По торговой статистике трудности в определении эластичностей от цен — в большой мере результат отмеченной выше медленности и плавности изменения цен на группы товаров и услуг по имеющейся статистике. Дело в том, что при использовании временны́х рядов в качестве статистической базы для выявления зависимости спроса от цен мы получаем большую взаимосвязь в значениях аргументов (цен) между собой и с другими факторами, что затрудняет решение того, какой из данной совокупности факторов ответственен за то или иное изменение спроса. Тем не менее расчеты такого рода проводятся как за рубежом, так и у нас (см. [31]) и могут быть использованы в планировании.

Другой путь решения проблемы зависимости спроса от цен и дохода связан с построением *целевой функции потребления.*

Пусть имеется n видов потребительских благ. Будем характеризовать вектором $x=(x_1,...x_n)$ количества этих благ, приходящиеся в среднем на одного потребителя за единицу времени (скажем, за год). Будем называть вектор x структурой потребления. Возможности выбора для всей совокупности потребителей всегда ограничены. Возможные структуры x образуют некоторое множество в n-мерном пространстве. Если обозначить вектор цен через $p=(p_1...,p_n)$ и средний доход через s, то ограничение, диктуемое доходом потребителя, запишется так:

$$\sum_k p_k x_k = s. \qquad \text{(III.2)}$$

В любых условиях, в которых действует потребитель, в действительности из всего множества A возможных структур потребления (множество в n-мерном пространстве x-ов) им выбирается только одна. Построить модель поведения потребителя — значит указать закон выбора этой одной структуры из всего множества возможностей.

Изменение выбранной структуры x зависит, вообще говоря, не только от изменения множества A, но и от прежней структуры потребления: имеет место переходный процесс. Однако если речь идет о достаточно длительных единицах времени, например о годе, то, видимо,

длительностью переходного процесса можно пренебречь и считать, что структура x полностью определяется множеством A возможных структур потребления.

Следующее фундаментальное предположение состоит в том, что существует такая функция $u(x)$, при которой выбираемая структура x всегда есть точка максимума функции $u(x)$ на множестве A.

Функция $u(x)$, к максимуму которой стремится в своих объективных действиях совокупность потребителей, будем называть целевой функцией потребления, или функцией предпочтения (см. [4]).

В условиях цен равновесия

$$A = \left\{x: \sum_k p_k x_k = s\right\}$$

и структура x удовлетворяет условию [1]

$$u(x) = \max\left\{u(y): \sum_k p_k y_k = s\right\}.$$

По методу Лагранжа для нахождения условного экстремума можно записать следующую систему уравнений, которой должна удовлетворять точка условного максимума:

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_k} = \lambda p_k, \qquad \text{(III.3)}$$

где λ — множитель Лагранжа.

Решая систему уравнений (III.2—III.3), получим вектор спроса x как функцию от цен p и дохода s.

Построив функцию предпочтения $u(x)$, вернее, систему (III.2—III.3), можно: 1) зная цены и доход, найти вектор спроса x на товары и услуги; 2) установив средние нормы потребления (или объемы товарооборота различных товаров), соответствующие планам производства или медицинским ограничениям, и среднедушевой доход населения, найти систему цен равновесия, при которых спрос будет совпадать с этими нормами. Таким образом,

[1] Под знаком максимума структура потребления обозначается через y, чтобы показать отличие любой возможной структуры y от фиксированной структуры x, выбранной потребителем в действительности.

функция предпочтения могла бы стать важным инструментом при планировании спроса и розничных цен.

Очевидно, функция предпочтения существенно нелинейна, так как иначе решение задачи на условный максимум показывало бы, что потребитель должен потреблять только один продукт. Еще Е. Е. Слуцким в 1915 г. было установлено [32], что первые и вторые производные функции $u(x)$ выражаются через коэффициенты эластичности потребления различных товаров от цен и дохода. Это дает принципиальную возможность получать аппроксимацию функции предпочтения в виде квадратичного полинома от x в окрестности любой точки на основе статистических данных.

За неимением сведений о строении функции предпочтения естественно воспользоваться ее разложением в ряд Тейлора вокруг структуры потребления X на базовый год. Если известно приближенное значение структуры потребления на плановый год, то ее также можно взять в качестве исходной точки X. Содержательную аппроксимацию можно получить, ограничиваясь членами первого и второго порядка (точки максимума функции определяются ее первыми и вторыми производными).

Принимая точку X за новое начало координат, получим для функции $u(x)$ следующий вид:

$$u(x) = \sum_k u_k x_k + \frac{1}{2} \sum_{i,j} u_{ij} x_i x_j + \text{const},$$

где x_k — отклонение объема потребления k-го блага от X_k.

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \; u_k = \frac{\partial u(0)}{\partial x_k}, \; u_{ij} = \frac{\partial^2 u(0)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Р. Фришем (см. [33]) на основе анализа функции предпочтения предложен и практически применен метод расчета всех перекрестных эластичностей через прямые эластичности и эластичности от дохода. Метод основан на дополнительном предположении о независимости по предпочтению («want independence») некоторых благ друг от друга. Этот метод применялся также различными экономистами в других странах (см., например, [34]). Независимость двух благ (i и j) по предпочтению соответствует нулевому значению соответствующей смешан-

ной производной функции предпочтения $u_{ij} = 0$. Мы еще вернемся к этому методу.

Отмеченные трудности, связанные с использованием временны́х рядов, приводят к мысли более полно использовать информацию, заключенную в статической картине, которую дают бюджетные обследования за каждый год. По-видимому, надежная модель может быть получена только путем сочетания расчетов на основе временны́х рядов и на основе бюджетных материалов.

В работе [4, п. 15] предлагается метод построения целевой функции потребления, основанный на расчете матрицы коэффициентов ковариаций потребления различных благ по данным бюджетных обследований [2]. Важнейшим условием качества целевой функции, полученной таким образом, как и любых других моделей потребления, основанных на бюджетном материале, является, конечно, репрезентативность сети бюджетных семей. Известно, что, несмотря на большие средства, затрачиваемые в СССР на обследование семейных бюджетов, их данные недостаточно репрезентативны. Это существенно тормозит разработку моделей потребления и критерия оптимальности. Одним из необходимых этапов в разработке системы оптимального планирования должна быть перестройка системы бюджетных обследований на принципиально новой основе.

11⁰. Проблема соизмерения ценностей во времени

Важнейшая проблема планирования на высшем уровне хозяйственной иерархии состоит в выборе оптимального соотношения между потреблением и накоплением, который связан с соизмерением во времени.

Существо проблемы состоит в следующем. Очевидно, для того чтобы выбранный план был оптимальным, должно выполняться следующее условие: не существует никакого допустимого плана, для которого показатели потребления за все годы были бы не ниже и хотя бы за

---

[2] См. также: В. А. Волконский. Статистическая модель поведения потребителя и изучение зависимосги спроса от цен. В сб. «Доходы и покупательный спрос населения (статистическая информация и экономико-математические модели)». М., изд-во «Статистика», 1967 (в печати).

один год выше показателей потребления выбранного плана. Планы, обладающие таким свойством, назовем *эффективными планами* (сравни [35, п. 7.4]).

Если отбросить все неэффективные планы, которые заведомо неоптимальны, то увеличение накопления (и, следовательно, уменьшение потребления) в ближайшие годы может быть оправдано только возможностью более значительного повышения потребления в будущем. В отношении выбора возможных кривых роста потребления во времени имеется определенная свобода. Если обозначить f^t тот или иной показатель уровня потребления в год t, то допустимые кривые $f=f^t$ могут иметь различный вид, например виды I и II на рис. 1.

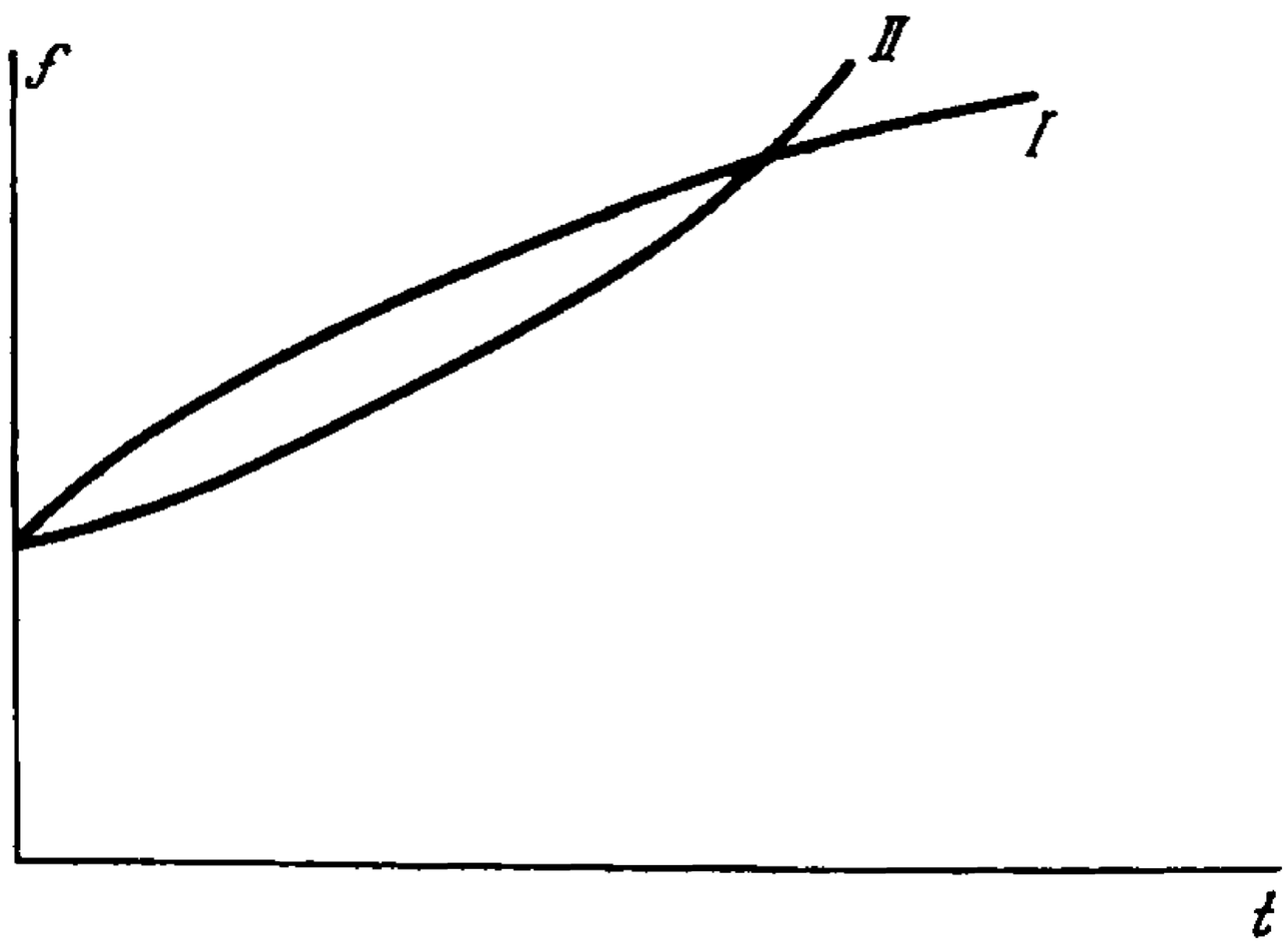

Рис. 1

Понятие оптимального развития экономики предполагает количественное решение вопроса о сравнительной ценности настоящего и будущего потребления. Сейчас, по-видимому, еще нет возможности сформулировать критерий оптимальности, который позволил бы решить эту проблему, опираясь только на бесспорные научные принципы. Эта проблема остается проблемой экономической политики.

Следует отметить, что при правильном учете обратного влияния повышения уровня непроизводственного потребления на развитие производства (влияние повышения образования и культуры народа, а также общего благосостояния на производительность труда, развития науки — на технический прогресс и т. д.) область свобо-

ды в выборе рационального соотношения потребления и накопления не может быть значительной.

Увеличение объема непроизводственного потребления в значительной степени имеет характер вложений в технологические фонды общества. Нарушение необходимой пропорции между вложениями в технологические и материальные фонды в любую сторону может привести к снижению темпов роста, а следовательно, и к уменьшению будущего потребления.

Основными направлениями исследований, относящихся к проблеме соотношения потребления и накопления в настоящее время, следует считать изучение обратного влияния увеличения фонда потребления на развитие производства и разработку различных вариантов возможных перспективных планов развития народного хозяйства и их неформальный анализ и сопоставление.

Статистика показывает, что темп роста фонда непроизводственного потребления обладает определенной устойчивостью во времени (см. [75—77]). Это наводит на мысль *принять в качестве базового варианта план, соответствующий максимальному темпу роста фонда потребления,* при условии, что этот темп роста остается постоянным, т. е. что он сохраняется в ближайшие годы («плановый период»), и создаются условия для такого же темпа роста в будущем. При этом цены предполагаются нормированными так, что их общий уровень остается достаточно стабильным. Для анализа вариантов плана, соответствующих преимущественному росту потребления или накопления в ближайшие годы, могут быть приняты варианты критерия в виде

$$U = \max$$

при

$$f^t \geqslant f^t(U),\ t_i^j \geqslant 0, \qquad \text{(III.4)}$$

где в качестве $f^t(U)$ берутся различные однопараметрические семейства функции времени, типа тех, которые изображены на рис. 1. При этом функция $f^t(U)$ должна возрастать при возрастании U. При нахождении оптимальных планов по этим критериям будут получены как оценки ограничений (III.4) весовые функции для построения критериев типа (III.1). Оценки ограничений (III.4), полученные при нахождении оптимальных планов по таким критериям, могут быть взяты

как значения весовой функции Q_t для построения критерия (III.1). Можно доказать, что при таком выборе весовой функции Q_t план и оценки, полученные при решении модели с критерием (III.4), будут оптимальными и для критерия (III.1).

Для модели, описанной в 27⁰, оценки ограничения (VII.7) есть

$$Q_t = (p^t, \beta^t),$$

так что соответствующий критерий в форме (III.1) должен иметь вид

$$U = \sum_{t=0}^{\infty} (p^t, \beta^t) f^t.$$

Каждый из критериев — типа (III.4) и типа (III.1) — обладает своими недостатками и достоинствами. В силу линейного характера зависимости критерия типа (III.1) от показателей f^t реального дохода за разные годы, очевидно, может оказаться, что оптимальный план, рассчитанный по такому критерию, без дополнительных ограничений, приводит к резко неравномерному распределению средств, направляемых на накопление и потребление в разные годы. Например, первое время происходит только накопление или только потребление в зависимости от начальных условий и параметров модели. Анализ оптимальных кривых развития экономики на односекторных и двухсекторных моделях (см., например, [80]) приводит именно к такому результату.

Эти неравномерности сами по себе могут противоречить социальным требованиям, но в сочетании с планами, соответствующими критерию типа (III.4) с плавной функцией, они показывают пути увеличения суммарных показателей за ряд лет.

12⁰. Согласованность критериев во времени

Обратим внимание на следующее обстоятельство, подчеркивающее прогнозный характер перспективной оптимизации в условиях непрерывности планирования.

При построении модели перспективного планирования необходимо учитывать тот факт, что в последующие годы могут измениться не только производственные связи

и показатели производства и потребления, но и сам критерий оптимальности.

При перспективном планировании бессмысленно говорить об оптимальности решений, принятых в настоящий момент, вне связи с теми целями, которые встанут в будущем перед обществом, и с его будущим экономическим поведением. Ведь если план экономического развития, выработанный сегодня на 10 лет, не отвечает хотя бы примерно критерию оптимальности, который будет иметь общество через год или два, и потребуется корректировать или отменить, например, многие начатые работы по строительству, то ясно, что план, принятый сегодня, нельзя считать оптимальным. Поэтому *проблема состоит в экстраполяции, предвидении не только производственных связей, но и критериев оптимальности и в оценке согласованности их во времени.* В работе [3] этот принцип формулируется как принцип минимума пересчетов плана и используется для исследования коэффициентов соизмерения во времени Q_t.

Это положение имеет важное теоретическое значение, в частности, для обоснования возможности прогноза цен на основе моделей оптимального планирования (см. разд. VII). Поэтому придется привести здесь его математическую формулировку.

Математически условие согласованности во времени сводится к следующему. Пусть ${}_sf_t = (f^s, f^{s+1}, \ldots, f^t)$, ${}_tf = (f^t, f^{t+1}, \ldots)$, $f_t = (\ldots, f^{t-1}, f^t)$. Из предположения о возможности оценить потребление за каждую единицу времени одним показателем f^t следует, что общий критерий оптимальности, который будет иметь общество в момент t, есть функционал от всей последовательности ${}_tf$. Этот функционал, вообще говоря, может зависеть от показателей потребления за прошлые периоды времени до момента t, т. е. от f. Эти показатели выступают как параметры. Обозначим критерий для момента t через $U_t(f_{t-1}, {}_tf)$. Тогда условие согласованности критериев во времени означает, что должно выполняться равенство

$$U_t(f_{t-1}, {}_tf) = F_t(f_t, U_{t+1}(f_t, {}_{t+1}f)), \qquad \text{(III.5)}$$

где $F_t(f_t, U)$ — некоторый функционал, не зависящий от ${}_tf$.

Это условие весьма общее и практически не может помочь выделению конкретного класса функционалов,

которые могли бы служить критерием оптимальности. Однако по каким бы критериям ни были рассчитаны планы и оценки, они не могут быть признаны оптимальными, если не выполнено это условие или какие-либо следствия, из него вытекающие.

Представляется очень важным рассмотрение критериев, не зависящих явно от времени, так как в периоды относительной устойчивости социально-экономических условий реальный критерий должен получаться с помощью внесения малых изменений в некоторый критерий такого типа. В случае независимости от времени критерия $U(f)$ функция $F(f, U)$ также не зависит от времени. Если критерий U не меняется во времени и не зависит от прошлого, т. е. от f_t, то получим

$$U_t({}_tf) = F(f^t, U_{t+1}(f)). \qquad \text{(III.5')}$$

Это предположение позволяет сделать более содержательные теоретические выводы (см. [26, 27]).

Из общего условия (III.5) все же вытекает следующий вывод. Все показатели плана, рассчитанные по критерию $U_t(f_{t-1}, {}_tf)$ для лет $t+1, t+2, \ldots,$ совпадают с соответствующими показателями, рассчитанными по критерию $U_{t+1}(f_t, {}_{t+1}f)$. Соответствующие системы оптимальных оценок, рассчитанные по этим двум критериям, оказываются пропорциональными друг другу, если предположить их единственность (см. [36]). Это означает, что оптимальные оценки, полученные при расчете перспективного плана на будущие годы, совпадают с теми оценками, которые будут получены при пересчетах плана впоследствии, с точностью до нормировочного множителя, приводящего их к одному масштабу (конечно, если не учитывать ошибок прогноза).

Докажем это положение, предположив для простоты, что критерий не зависит от прошлого, а только от состояния в настоящий момент времени. Это означает, что выражение $U_{t+1}(f_t, {}_{t+1}f)$ можно заменить на $U_{t+1}(f^t, {}_{t+1}f)$ и соотношение (III.5) записать в виде

$$U_t(f^{t-1}, {}_tf) = F_t(f^t, U_{t+1}(f^t, {}_{t+1}f)). \qquad \text{(III.6)}$$

Пусть задача планирования представлена в следующем виде.

Задана дискретная последовательность моментов времени $t=0, 1, 2, \ldots, T$. В каждый момент времени t решается задача оптимального планирования, которая состоит в нахожде-

нии максимума непрерывного выпуклого вверх ограниченного функционала $U_t(\bar{x}_t)$ на выпуклом ограниченном множестве $\bar{x}_t \in B_t$, где $\bar{x}_t$ — последовательность векторов x_τ, $\tau \geqslant t$, определяющих план на все следующие за t моменты времени:

$$\bar{x}_t = (x_t, x_{t+1}, \ldots, x_T).$$

Эту задачу назовем t-задачей оптимального планирования. Обозначим через S оператор сдвига, такой, что если

$$\bar{x}_0 = (x_0, x_1, \ldots, x_T), \text{ то } S\bar{x}_0 = (x_1, x_2, \ldots, x_T).$$

Множества B_t, вообще говоря, должны меняться с изменением значений $(x_0, x_1, \ldots, x_{t-1} = \bar{\bar{x}}_t)$. Если отвлечься от ошибок прогноза, от несовершенства моделей производственных связей, то, очевидно, множества B_t должны удовлетворять следующему условию согласованности. Пусть набор $\bar{\bar{x}}_t$ считается постоянным. Тогда при любом значении x_t множество B_{t+1} совпадает с сечением множества B_t, соответствующим этому фиксированному значению x_t первой координаты. Выполнение такого условия обычно является очевидным. В частности, легко проверить, что ему удовлетворяет система ограничений (VII.1)—(VII.6) модели, описанной в 27⁰.

Условие (III.6) будет иметь вид

$$U_t(\bar{x}_t) = F_t(\bar{\bar{x}}_t, U_{t+1}(Sx_t)),$$

где $F_t(x, U)$ непрерывна и строго возрастает по U.

Условие согласованности оптимальных планов должно состоять, очевидно, в следующем. Пусть B_t — множество допустимых последовательностей $\bar{x}_t$, отвечающее некоторому набору $\bar{x}_t = (x_0, \ldots, x_{t-1})$. Пусть $\bar{x}_t^* = (x_t^*, x_{t+1}^*, \ldots, x_T^*)$ — оптимальный план для множества B_t. Пусть B_{t+1} отвечает набору $\bar{\bar{x}}_{t+1} = (x_0, \ldots, x_{t-1}, x_t^*)$ и $\bar{x}_{t+1}^* = (x_{t+1}^{**}, x_{t+2}^{**}, \ldots, x_T^{**})$ — оптимальный план для этого множества. Тогда план $x_t = (x_t^*, x_t^{**}, x_{t+1}^{**}, x_{t+2}^{**}, \ldots)$ также должен быть оптимальным для множества B_t. Легко проверить, что это условие согласованности планов следует из согласованности множеств B_t допустимых планов и согласованности критериев U_t.

Назовем последовательность векторов $\bar{p}$ обобщенным гра-

диентом функции $U(\bar{x})$ в точке $\bar{x}^0$, если линейная функция

$$u = U(\bar{x}^0) + (\bar{p},\ \bar{x} - \bar{x}^0)$$

соответствует опорной гиперплоскости к множеству $\{(u, \bar{x}) : u \leqslant U(\bar{x})\}$ пространства $(u, \bar{x})$ в точке $(U(\bar{x}^0), \bar{x}^0)$. Оптимальной системой оценок (ОСО) $\bar{P}^*_\tau$ назовем обобщенный градиент функции $U_\tau(\bar{x}_\tau)$ в точке $\bar{x}^*_\tau$, соответствующей оптимальному плану, такой, что гиперплоскость

$$(\bar{p}^*_\tau,\ \bar{x}_\tau) = (\bar{p}^*_\tau,\ \bar{x}^*_\tau)$$

в пространстве $\bar{x}_\tau$ разделяет выпуклые множества B_τ и $\bar{B}^*_\tau = \{\bar{x}_\tau : U_\tau(\bar{x}_\tau) > U_\tau(\bar{x}^*_\tau)\}$. Эти оценки посредством известных соотношений Куна — Таккера (см. [35, п. 71]) могут быть связаны с оценками ограничений в модели множества производственных возможностей B_t.

Оптимальной оценкой (или системой оценок) показателя (или вектора) x_t с точки зрения критерия $U_\tau(\bar{x}_\tau)$ для $\tau \leqslant t$ естественно назвать компоненту $p^*_{\tau,t}$ последовательности $\bar{p}^*_\tau$, соответствующую компоненте x_t вектора x_τ. После введения всех определений становится тривиальным следующее утверждение.

Пусть соблюдаются условия согласованности множеств B_t и критериев U_t, и $\bar{p}^*_t = (p^*_{t,t}, p^*_{t,t+1}, \ldots p^*_{t,T})$ и $\bar{x}^*_t = (x^*_t, x^*_{t+1}, \ldots)$ есть ОСО и оптимальный план для t-задачи, определяемой набором $\bar{\bar{x}} = (x_0, \ldots, x_{t-1})$. Пусть B_{t+1} определяется набором $\bar{\bar{x}}_{t+1} = (x_0, \ldots, x_{t-1}, x^*_t)$. Тогда существует неотрицательное число ν такое, что последовательность $\hat{p} = (\nu p^*_{t,t+1}, \nu p^*_{t,t+2}, \ldots)$ является ОСО для $(t+1)$-задачи.

Действительно, по определению гиперплоскость $(\bar{p}^*_t, \bar{x}_t) = (\bar{P}^*_t, \bar{x}^*_t)$ является опорной к множеству B_t и разделяет множества B_t и $\{\bar{x}_t : U_t(\bar{x}_t) > U_t(\bar{x}^*_t)\}$.

Множество B_{t+1} есть сечение множества B_t подпространством, определяемым равенством

$$x_t = x^*_t.$$

Поэтому в этом подпространстве гиперплоскость

$$\sum_{k=1}^{T-t} p^*_{t,t+k}(x_{t+k} - x^*_{t+k}) = 0$$

является опорной к множеству B_{t+1} и разделяет множества B_{t+1} и $B_{t+1} = \{\bar{x}_{t+1} : U_t(x_t^*, x_{t+1}, \ldots) > U_t(x_t^*)\} = \{\bar{x}_{t+1} : U_{t+1}(\bar{x}_{t+1}) > U_{t+1}(\bar{x}_{t+1}^*)\}$. Чтобы гиперплоскость

$$u = U_{t+1}(\bar{x}_{t+1}^*) + \nu(\hat{p}, \bar{x}_{t+1} - \bar{x}_{t+1}^*)$$

в пространстве $(u, \bar{x}_{t+1})$ была опорной к множеству $\{(u, \bar{x}_{t+1}) : u \leqslant U_{t+1}(\bar{x}_{t+1}^*)\}$, теперь достаточно выбрать ν так, чтобы величина

$$\max_{\bar{x}_{t+1}} [U_{t+1}(\bar{x}_{t+1}) - U_{t+1}(\bar{x}_{t+1}^*) - \nu(\hat{p}, \bar{x}_{t+1} - \bar{x}_{t+1}^*)]$$

принимала наименьшее (нулевое) значение. Этого всегда можно добиться в силу выпуклости критерия $U_{t+1}(\bar{x}_{t+1})$. При таком выборе ν вектор $\hat{p}$ есть обобщенный градиент функции $U_{t+1}(\bar{x}_{t+1})$, т. е. ОСО для $(t+1)$-задачи.

Вообще говоря, если ОСО для $(t+1)$-задачи неединственна, то нельзя утверждать, как в отношении планов, что при любой ОСО $\bar{P}_{t+1}^* = (P_{t+1,t+1}, P_{t+1,t+2}, \ldots)$ для $(t+1)$-задачи последовательность $(P_{t,t}^*, \nu P_{t+1,t+1}, \nu P_{t+1,t+2} \ldots)$ является ОСО для t-задачи. Однако в задачах планирования при достаточно полном учете ограничений и связей естественно ожидать, что большинство компонент векторов оценок окажутся однозначно определенными, и приведенное утверждение служит обоснованием использования моделей оптимального планирования для прогноза системы оценок. Если система оптимальных оценок существенно неединственна, то, вообще говоря, она не годится для прогноза цен и должна быть доопределена.

IV. МОДЕЛЬ ЭКОНОМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ И ТОВАРНО-ДЕНЕЖНЫЙ МЕХАНИЗМ

13⁰. Модель экономического равновесия

Для построения системы оптимального управления хозяйством на основе системы взаимодействующих экономико-математических моделей, как уже говорилось (2⁰), важнейшее значение имеет возможность установления таких взаимоотношений между хозяйственными органами, при которых точка равновесия системы совпадает с народнохозяйственным оптимумом.

Для математического исследования этого вопроса можно пользоваться *языком теории бескоалиционных игр многих игроков.*

Можно представлять себе модель каждого производственного комплекса как описание множества возможных стратегий (например, допустимых планов производства) и функции выигрыша (критерий оптимальности, например прибыль) его управляющего органа, а процесс выработки плана как игру, в которой игроками являются различные звенья системы планирования и управления. Функция выигрыша каждого игрока зависит от стратегий, выбранных другими игроками (например, критерий в модели предприятия зависит от оценок продукции, которые представляют собой стратегию отраслевого управления).

Точкой равновесия называется такой набор стратегий игроков, когда ни одному из них в отдельности не выгодно изменять свою стратегию (в соответствии с той функцией выигрыша, которую имеет каждый игрок при данном наборе стратегий других игроков).

Известно, что задача линейного программирования эквивалентна матричной игре двух лиц с нулевой сум-

мой в том смысле, что существует матричная игра, для которой пары стратегий игроков поставлены во взаимооднозначное соответствие с возможными решениями прямой и двойственной задач, и минимаксная пара соответствует оптимальному решению [42]. Это утверждение может быть распространено на модели выпуклого программирования и на игры многих игроков, являющиеся отражением блочной структуры модели (автономность подсистем в общей моделируемой системе). При этом задаче выпуклого программирования ставится в соответствие выпуклая бескоалиционная игра нескольких лиц, у которой единственная (с точностью до эквивалентности в смысле безразличия по выигрышам всех игроков) точка равновесия совпадает с оптимумом исходной задачи.

Чтобы показать более конкретный экономический смысл этого принципа, ниже будет рассмотрена задача блочного выпуклого программирования и ее интерпретация как модели товарно-денежного механизма.

Пусть все хозяйство представляет собой совокупность производственных единиц (например, предприятий или отраслей производства), вообще органов, отвечающих за производство и производственное планирование. Пусть в хозяйстве функционируют J групп ресурсов. Обозначим через y_j^k вектор выпуска (или затрат, если соответствующая компонента отрицательна) ресурсов $\overline{j}$-й группы k-й производственной единицы. Для каждой производственной единицы имеются свои ограничения, определяющие множество допустимых векторов затрат-выпуска (множества производственных возможностей) с учетом возможных капитальных вложений. Обозначим их через Y^k ($y^k \in Y^k$). Вектор непроизводственного потребления обозначим через $x=(x_1, \ldots, x_y)$, а $y^k=(y_1, \ldots, y_y)$ и $y = \sum_k y^k$. Пусть критерий оптимальности есть $u(x)$. Тогда задача может быть записана так:

$$\begin{gathered} u(x)=\max \\ x \leqslant y, \\ y \in Y, \end{gathered} \qquad \text{(IV.1)}$$

где $Y = \left\{ y:\ y = \sum_k y^k,\ y^k \in Y^k,\ k = 1, \ldots, K \right\}$.

Пусть функция $u(x)$ выпукла вверх, а множества Y^k выпуклы и ограничены. Тогда, как известно, решение этой задачи совпадает с седловой точкой функции Лагранжа

$$Y(x, y; \mu) = U(x) + (p, y - x)$$

на множестве $\{x, y: y \in Y\}$. Значения множителей Лагранжа p^* в седловой точке естественно называть оценками ресурсов (оценки балансовых ограничений $x \leqslant y$).

Так как соотношения «меньше-больше» между значениями функции $u(x)$ не изменяются при умножении ее на любую положительную константу C, то функция $u(x)$ в качестве критерия оптимальности может быть заменена на функцию $Cu(x)$. При этом оптимальный план x^*, y^* не изменится, а оценки p^* превратятся в C_{p^*}. Нормировочный множитель C («масштаб цен») будем определять из условия

$$(p^*, x^*) = S,$$

где S — заданная величина («фонд потребления»). Оценки $\overline{\overline{p}}^*$, удовлетворяющие такой нормировке, будем называть оптимальными ценами. Оптимальный план x^*, y^* и оптимальные цены p^* назовем точкой оптимума.

Рассмотрим теперь следующую игру $K + J + 1$ игроков.

Первые K игроков (игроки с номерами $1, \ldots, K$) есть производственные единицы, стратегиями которых служат векторы затрат-выпуска $\overline{\overline{y}} \in Y^k$. Кроме того, имеются хозяйственные организации, ответственные за сбыт и снабжение и за установление цен на продукцию и ресурсы (игроки с номерами $j = K + 1, \ldots, K + J$, «торговые организации»). Стратегиями $K + j$-го игрока являются цены p_l на ресурсы j-й группы. Чтобы избежать математических сложностей, предположим, что область изменения цен ограничена, например, $0 \leqslant p_l \leqslant P$, где P_l — вектор с достаточно большими компонентами. Обозначим для краткости $p = (p_1, \ldots, p_j)$. Наконец, имеется орган, планирующий непроизводственное потребление ($K + J + 1$-й — игрок, «потребитель»), стратегиями которого являются векторы x. Предположим, что известен (задан) общий фонд непроизводственного потребления S и этот орган, планирующий потребление, изучая потребности

общества, намечает его распределение и разрабатывает его наиболее рациональную материальную структуру x (план потребления).

Предположим, что множество X возможных значений вектора x также всегда ограничено. Этот план x выступает как спрос на продукцию производства со стороны непроизводственной сферы и, естественно, должен изменяться при изменении цен и их ожидаемого снижения или повышения. Если этот орган правильно оценивает потребности общества, то он должен стремиться максимизировать величину $u(x)$ — критерий оптимальности при условии выполнения ограничения $(p, x) \geqslant S$. Чтобы формализовать эти условия в виде игры, введем достаточно большой штраф R за превышение расходов над доходами и запишем функцию выигрыша потребителя в виде

$$\Phi_0(x; p) = u(x) - R[(p, x) - S]^+,$$

где $[a]^+ = \begin{cases} 0, & \text{если } a \leqslant 0, \\ a, & \text{если } a > 0. \end{cases}$

Далее предполагается, что производственные объекты стремятся к максимизации своей прибыли, т. е. что функции выигрыша игроков с номерами $k = 1, \ldots K$ равны

$$\Phi_k(y^k; p) = (p, y^k).$$

Предполагается, что каждая сбытовая (или торговая) организация устанавливает цены на определенный круг товаров и обязана удовлетворить спрос на эти товары со стороны производства и потребления и полностью скупить или организовать сбыт всей их продукции по этим ценам. Закупочные и отпускные цены должны совпадать. Затраты, связанные с работой самой торгово-сбытовой организации, и ее прибыль, возникающая от разницы этих цен, не учитываются. Это естественное условие, так как превышение закупочных цен над отпускными невыгодно самой этой организации, а при необоснованном превышении отпускных цен над закупочными у потребителей и производителей продукции терялся бы стимул пользоваться услугами этой организации. При таких условиях предполагается, что торгово-

сбытовые организации также стремятся максимизировать прибыль (или минимизировать убыток), возникающую от разницы спроса и предложения. Это выражается в том, что их функции выигрыша в модели равны:

$$\varphi_j(p_j; x_j; y_j) = (p_j, x_j - y_j), \quad j = K+1, \ldots, K+J.$$

Если множества Y^k производственных возможностей непусты и выпуклы и функция $u(x)$ непрерывна и выпукла вверх, то описанная игра выпуклая по определению работы [37]. Из этого следует, что она имеет точку равновесия [37, § 23].

Легко проверить, что каждая точка оптимума задачи (IV.1) есть точка равновесия этой игры.

И наоборот, каждая точка равновесия $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$ есть точка оптимума. Действительно, пусть константа C выбрана так, что множитель Лагранжа в задаче нахождения максимума функции $Cu(x)$ при условии $(p, x) \leqslant S$ равен единице. Тогда, как легко проверить, точка $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p})$ — седловая точка функции Лагранжа:

$$L(x, y; p) = Cu(x) + \left(p, \sum_k y^k - x\right)$$

для задачи

$$Cu(x) = \max_{x \leqslant y},$$

на множестве $\{x \in X, y \notin Y, 0 \leqslant p \leqslant P\}$, что доказывает утверждение.

Таким образом, только в точке оптимума ни одна хозяйственная организация (ни один из игроков) не будет стремиться к изменению своего плана или установленных ею цен, а всякое отклонение от оптимума даст возможность хотя бы одной из них повысить свою прибыль путем изменения своего плана или цен.

Математическая разработка подобных моделей составила важный раздел математической экономии (так называемые модели конкурентного равновесия). Известные математические схемы конкурентного равновесия если и не излагаются обычно на языке теории игр, то используют аналогичный математический аппарат и всегда могут быть сведены к игровой схеме. Описанная модель близка к модели Эрроу — Дебре (см., например,

[35, п. 8.8 и 9.2]). В приведенной интерпретации она изложена как статическая. Но сама математическая схема ни в коей мере не мешает ее интерпретации как динамической модели. Для этого достаточно, например, считать различные группы компонент векторов x, y, p, относящимися к различным периодам времени. Термины «план» и «цены» можно понимать и в перспективном значении, как «план развития производства» и «ожидаемая, или планируемая, динамика цен», а равенство производства и потребления — выполняющимся в каждую единицу времени. Сопоставление цен (или ценности) ресурсов в разные моменты времени должно производиться с учетом дисконтирования, т. е. коэффициентов приведения к одному моменту времени.

Теорема о совпадении точки равновесия с народнохозяйственным оптимумом дает теоретическую основу для системы оптимального управления, использующей самостоятельность и инициативу хозяйственных единиц в принятии хозяйственных решений.

Состояние экономического равновесия можно точно интерпретировать как систему долгосрочных договоров о поставках продукции или производстве работ с указанием динамики цен на весь период действия договора, причем каждый хозяйственный орган имеет право отказаться от предложенного ему договора, но такой отказ для него невыгоден.

В отношениях вышестоящих и нижестоящих хозяйственных организаций это совпадает с представлением о плане-договоре (см. [6]), обязательном для обеих сторон, так что *обе стороны несут материальную ответственность* за его нарушение. При этом каждое предприятие имеет право отказаться от предлагаемого плана, если представит другой вариант плана, обеспечивающий ему бóльшую прибыль.

Можно рассмотреть игровые модели, в которых планирующий орган определяет лимиты на использование ресурсов или задания по выпуску продукции для секторов производственной и непроизводственной сферы, тогда стратегии секторов выразятся в оценках этих ограничений. Такая модель рассмотрена Корнаи и Липтаком в [38] (см. также описание такой модели в [7, п. 13]).

В рассмотренной модели экономического равновесия сфера непроизводственного потребления представлена

одним игроком, что не дает возможности моделировать вопросы распределения. Аналогичные модели со многими потребителями дают принципиальную возможность строгого математического подхода к понятию экономического оптимума, соответствующего тем или иным принципам распределения, например распределения в зависимости от эффективности труда различных категорий трудящихся. Такой подход имеет актуальное значение, в частности, при постановке задачи оптимального планирования размещения хозяйства по различным экономическим районам (см. [39]).

Другое использование моделей равновесия со многими потребителями состоит в том, что планирование в различных секторах непроизводственной сферы может быть также поручено различным игрокам. Другими словами, само определение общественных потребностей, т. е. определение критерия оптимальности, также может быть децентрализовано. При этом невозможность формализовать определение тех или иных параметров критерия оптимальности не мешает находить точку равновесия всей игры, которую следует признать народнохозяйственным оптимумом в той же мере, в какой отдельные органы, ведающие определением различных общественных потребностей, способны в настоящее время находить оптимальное решение своих частных проблем. Как видно из модели, не только планы производства и потребления, но и цены (оценки) продукции и ресурсов могут вырабатываться децентрализованно игроками, цель которых — обеспечение равновесия (баланса) спроса и предложения по отдельным группам товаров (выработка цен равновесия), например по группам товаров, соответствующим продукции отдельных отраслей производства. Эти игроки, как и игроки, отвечающие за производство, стремятся к максимизации своей прибыли или к минимизации убытка, который они терпят при несовпадении спроса и предложения.

В п. 2^0 было сказано, что при теоретическом анализе удобно разделять проблему установления ответственности за реализацию оптимального плана и проблему алгоритма разработки оптимального плана или организации процесса выработки информации об оптимальном режиме хозяйства. До сих пор говорилось о первом из этих вопросов. Однако товарно-денежный механизм

может быть использован также для выработки оптимального плана. Многие алгоритмы оптимального программирования и нахождения точек равновесия в теории игр представляют собой математическую имитацию, или аналог процесса установления рыночных цен.

Изучение итеративных процессов показывает, что нахождение оптимума может проводиться децентрализованно, т. е. что точка равновесия, или оптимума, может быть найдена в результате обмена информацией между хозяйственными органами, каждый из которых многократно решает задачу оптимизации, руководствуясь своим индивидуальным (локальным) критерием оптимальности (см. раздел V). Это объясняет, почему во многих ситуациях процесс заключения непосредственных контрактов между поставщиками и потребителями может оказаться наиболее эффективным способом нахождения оптимального плана.

В то же время известно, что стихийный процесс изменения спроса, предложения и цен на рынке не может считаться универсальным способом нахождения точки равновесия, так как он может приводить и приводит к экономическим циклам. На языке математики аналогом этого факта являются незатухающие циклические колебания, которые можно исследовать в итеративных процессах теории игр и оптимального программирования.

Таким образом, возможно использование товарно-денежного, или рыночного, механизма для организации процесса децентрализованной выработки оптимального плана. Однако такой процесс нуждается в регулировании.

14°. Теоретические основы выбора показателя для оценки хозяйственной деятельности

До сих пор при рассмотрении модели равновесия не принимался в расчет следующий важный фактор. Предполагалось, что имеется полная информация о производственных возможностях и о потребностях общества. В то же время система стимулирования и ответственности за принятые решения должна обеспечивать заинтересованность не только в осуществлении плана, построенного на основе имеющейся информации, но и в формирова-

нии необходимой экономической информации, в раскрытии резервов производства, более совершенных технологических способов и новых способов удовлетворения потребностей. Кроме того, хозяйственные органы должны быть заинтересованы в передаче такой информации заинтересованным органам. Например, производственные единицы должны быть заинтересованы в принятии планов, учитывающих вновь открытые резервы расширения производства.

В этой связи важно отметить, что совпадение точки равновесия игры с оптимумом соответствующей задачи математического программирования гарантируется в случае выпуклых *бескоалиционных игр*. Образование коалиций между игроками можно рассматривать как образование новой игры с меньшим количеством игроков. Если новая игра оказывается выпуклой, такая коалиция не нарушает гомеостатического свойства игры. Однако в случае объединения игрока, ответственного за выработку цен равновесия, с одним или несколькими потребителями или производителями соответствующих товаров, их совместная функция выигрыша (сумма их индивидуальных функций выигрыша) может перестать быть выпуклой. На этом основан хорошо известный эффект возникновения *монопольных цен* в случае, когда изменение плана производства одного из игроков может существенно влиять на оценки соответствующих товаров. Этот эффект проявляется в том, что если небольшое увеличение предложения товара ведет к большому понижению цены на этот товар, то согласно критерию максимизации прибыли предприятию может оказаться выгодным не расширять производство, а, наоборот, скрывать от плановых органов информацию о возможностях его расширения и тем самым способствовать удерживанию высоких цен (хотя это и невыгодно для общества).

Представляет интерес изучение таких принципов и механизмов стимулирования, при которых этот отрицательный эффект не проявлялся хотя бы при достаточно малых изменениях производственных возможностей или потребностей общества, когда решения могут приниматься непосредственно на основе подсчета изменений прибыли. Проблема локального критерия оптимальности, устраняющего отрицательное влияние этого эффекта, рассматривается в работе [11]. Один из таких принципов

стимулирования основан на следующей интерпретации товарно-денежного механизма. Предположим, что имеется оптимальный план, зафиксированный в виде системы долгосрочных договоров между хозяйственными органами с указанием динамики цен (оптимальных) на весь срок действия договора. Предположим, что некоторое предприятие обнаруживает у себя резервы расширения производства, позволяющие ему выпускать дополнительно небольшую партию продукции.

Очевидно, на его решение о выпуске этой дополнительной партии не должно влиять опасение, что это вызовет понижение цены на всю остальную массу продукции. Поэтому естественно допустить установление новых контрактов о поставке этой партии, независимо от договоров, заключенных раньше (с указанием новой цены, может быть отличной от прежней).

Возникает положение, при котором один и тот же товар поставляется различным потребителям по различным ценам. Это не противоречит принципам оптимальности. В определенном смысле разности цен при этом можно характеризовать как «ренту потребителя». Длительность заключаемых договоров может при этом определяться надежностью информации об изменении производства, потребностей и цен в будущем, причем в заключении таких договоров могут быть заинтересованы одинаково как поставщики, так и потребители.

Применение этого принципа может оказаться тем более реальным, чем более надежной информацией будет располагать хозяйство в результате внедрения математических методов и ЭВМ в управление.

В то же время, видимо, этот принцип не может быть применен в условиях, когда множество мелких потребителей не представлены единым органом, как это имеет место, например, в розничной торговле при продаже товаров населению.

В тех случаях, когда по той или иной причине необходимо, чтобы все продажи одного и того же продукта осуществлялись по одинаковой цене, можно устранить тенденцию к сохранению высокой цены и ограничению производства с помощью следующего принципа оценки хозяйственной деятельности производственного объекта. Изменение цен и их ожидаемой динамики, как и изменение других внешних условий, в которых действует дан-

ный объект, не должно влиять на эту оценку. В терминах игровой модели показателем эффективности малого изменения стратегии какого-либо игрока может служить изменение его выигрыша, которое соответствовало бы этому изменению его стратегии при условии, что стратегии остальных игроков не изменились. Внесение в план данного объекта некоторого изменения, соответствующего приращению $\delta x(t)$ вектора $x(t)$ затрат и выпуска как функции времени t на планируемом отрезке $(0, T)$, должно оцениваться интегралом

$$\delta W = \int_0^T (p(t), \delta x(t))\, dt,$$

где $p(t)$ — вектор цен, соответствующих положению равновесия, или оптимальному плану, до внесения изменения δx_i

Такой показатель для оценки эффективности мероприятий и оценки хозяйственной деятельности производственных объектов предлагается в [11. Он, очевидно, вполне согласуется с обычными представлениями об использовании объективно обусловленных оценок.

В рассмотренном выше примере с выпуском дополнительного количества продукции это означает, что цены могут быть снижены на весь объем продукции, так что прибыль предприятия, исчисленная в новых ценах, окажется меньше. Однако показатель его хозяйственной деятельности должен увеличиться. Это можно рассматривать как важное уточнение в представление о критерии максимизации прибыли. Оценка хозяйственной деятельности производственного объекта должна определяться только той частью общего прироста приведенной прибыли, которая является результатом изменения его затрат и выпуска. Общее изменение приведенной прибыли δP включает еще часть, которая является результатом изменения цен $\delta p(t)$:

$$\delta P = \delta W + \int_0^T (\delta p(t),\ x(t))\, dt.$$

Второе слагаемое не должно влиять на оценку хозяйственной деятельности.

Как уже говорилось, этот способ предпочтителен в том случае, когда невозможно осуществить продажу одного продукта по различным ценам. Однако он обладает тем недостатком, что требует строить показатель хозяйственной деятельности не по фактическим результатам работы, а по ожидаемым изменениям хозяйственного эффекта в будущем, что может привести к стремлению необоснованно завышать производственные планы. Очевидно, вопрос о целесообразности применения в тех или иных случаях различных механизмов стимулирования должен решаться с учетом конкретных условий.

Относительно крупные изменения в том или ином звене хозяйственного управления требуют существенных изменений также во многих звеньях, связанных с ним. Например, эффект для народного хозяйства от введения в производство нового вида продукции может быть реализован часто только при перестройке производства на предприятиях-потребителях. Для общей проблемы определения меры поощрения и распределения ответственности за такие крупные изменения в силу существенной нелинейности хозяйственных связей, по-видимому, невозможно найти однозначное и бесспорное решение.

Следует обратить внимание на вопрос о жесткости условий выполнения плана или условий договора. В различных областях хозяйства в соответствии с требованиями гибкости в ответах на изменение коньюнктуры эти условия могут быть различны. В соответствии с этим должен рассматриваться вопрос о принятом в настоящее время порядке установления *повышенных норм материального поощрения за плановую прибыль по сравнению со сверхплановой прибылью*. Это различие норм можно рассматривать как стимулирование работы по улучшению самого планирования. Такой порядок стимулирования обеспечит заинтересованность каждого предприятия в уточнении своей модели, в правильном и полном отражении в ней всех производственных возможностей и в доведении информации об этих возможностях до управляющего органа.

Такой подход к проблеме стимулирования имеет важное значение для совершенствования системы планирования и управления и, в частности, для внедрения математических методов и вычислительной техники.

15⁰. Ограничения в использовании товарно-денежного механизма и цен для оптимального управления хозяйством

Основное предположение, при котором доказывается существование точки равновесия и ее совпадение с точкой оптимума в моделях экономического равновесия,— предположение выпуклости множеств и функций, фигурирующих в модели. В то же время, как уже говорилось, широкий класс задач планирования и управления плохо аппроксимируется моделями линейного или выпуклого программирования. Модели отраслевого перспективного планирования, как правило, должны содержать целочисленные переменные.

Попытки определить величины, аналогичные оценкам для задач с дискретными переменными, не дают хороших результатов. Такие величины не обладают многими естественными свойствами, которые делают оценки таким важным инструментом экономического управления. По-видимому, использование оценок целесообразно в той мере и в таких условиях, в какой достаточно адекватным отражением реальности служат модели с непрерывными переменными.

В описанной выше системе моделей (см. раздел II) *цены могут быть определены как оценки ресурсов в моделях текущего планирования* (II.1) *с учетом дисконтирования* (см. 27⁰). В зависимости от степени усреднения по времени эти оценки могут быть более или менее устойчивы. Их изменение определяется изменениями элементов моделей, в частности ограничений по мощностям и заданий по выпуску продукции.

Рассмотрим ограничения по мощностям. Скачкообразный характер их изменения необходимо должен приводить к колебаниям прокатных оценок. (Оценка «узких мест» является высокой, а после «расшивки» узкого места соответствующая оценка падает.)

Изменение оценок, как правило, не должно носить строго скачкообразного характера, так как резкость этих изменений смягчается возможностью накопления запасов, что не всегда, однако, дает возможность сгладить колебания.

В силу стохастического характера изменения параметров моделей и неопределенности в перспективных

решениях колебания оценок также носят стохастический характер. Несмотря на такую неустойчивость в пределах малых промежутков времени, оценки ресурсов играли и играют огромную роль в регулировании экономических процессов в мировом хозяйстве. Это можно объяснить, в частности, тем, что показатели оценок, усредненные за достаточно долгий промежуток времени, или средние по группе товаров, обнаруживают определенную устойчивость и изменяются достаточно медленно.

При рассмотрении вопросов перспективного планирования в масштабах всего хозяйства (определение оптимальных пропорций и темпов развития отраслей производства) вновь появляется возможность использовать модели с непрерывными переменными за счет того, что они должны строиться в укрупненных показателях (например, на базе межотраслевых балансов). Это можно рассматривать как обоснование возможности руководствоваться показателем прибыли в оценке работы крупных производственных комплексов за длительные периоды.

Большое практическое значение имеет выбор показателей такой степени усреднения, чтобы обеспечить достаточную их устойчивость или возможность прогноза их изменений и в то же время достаточную дифференцированность, необходимую для решения практических вопросов. Один из способов решения этой задачи — затратный метод расчета цен с использованием результатов расчета отраслевых индексов цен по моделям оптимального перспективного планирования народного хозяйства в укрупненных показателях (см. 28⁰—29⁰).

В последнее время большое внимание уделяется вопросам соотношения «плана и рынка». Как видно из всего сказанного выше, товарно-денежный механизм рассматривается в настоящей работе как инструмент установления системы ответственности стимулирования в процессе децентрализованной разработки и совершенствования оптимального плана. При таком понимании, очевидно, нет никаких оснований противопоставлять товарно-денежный механизм плановому началу в экономике. Содержание настоящего раздела приводит к выводу, что если не понимать рыночный механизм как чисто стихийный процесс и применять его в тех рамках, где выполняются указанные выше ограничения, то в условиях социа-

листического хозяйства противопоставление «рынка» и «плана» не правомерно.

С одной стороны, оформление плана как всеобъемлющей системы договоров, при которой каждый хозяйственный орган обладает большой самостоятельностью и ответственностью, а также стимулом к проявлению инициативы для повышения его эффективности, может служить только укреплению принципов планового управления хозяйством.

С другой стороны, следует отметить, что в современном индустриальном хозяйстве никакие рыночные отношения не могут мыслиться без составления планов работы хозяйственных комплексов на более или менее длительный период. А всеобъемлющая система длительных контрактов между вышестоящими и нижестоящими хозяйственными органами, оформленных в рамках хозяйственного законодательства, эквивалентна по своему экономическому значению принципу планового управления.

V. АЛГОРИТМЫ ПЛАНИРОВАНИЯ. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ХОЗЯЙСТВЕННЫХ ЕДИНИЦ И ЗВЕНЬЕВ СИСТЕМЫ ЭКОНОМИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

16°. Принципиальная схема итеративного алгоритма последовательного улучшения плана всей системы путем взаимного уточнения моделей подсистем. Теоретические основы саморегулирования

Модели хозяйственных комплексов связаны между собой таким образом, что элементы критерия и ограничения одной модели определяются решениями других моделей. Так, ограничения по мощностям наличного оборудования в моделях текущего планирования определяются по решениям моделей перспективного планирования. Оценки как элементы критерия в перспективных и текущих моделях зависят от решений моделей хозяйственных комплексов, связанных с данным комплексом взаимными поставками ресурсов и продукции.

Наиболее известным алгоритмом получения оптимального плана всей системы в процессе взаимного уточнения моделей подсистем является метод разложения, или декомпозиции, Данцига — Вольфа [40] для блочной задачи линейного программирования. Основные идеи этого алгоритма наиболее соответствуют условиям получения оптимального текущего плана на уровне отрасли хозяйства путем использования оптимальных планов, входящих в эту отрасль предприятий.

Процесс расчета оптимального плана отрасли можно упрощенно представить в виде следующей процедуры, которая может быть реализована как вычислительный алгоритм для ЭВМ и как процесс обмена информацией

между органами управления производством. Каждое предприятие рассчитывает по соответствующему методу вариантные производственные возможности по выпуску конечной (с точки зрения предприятия) продукции и передает эти предложения в центральный управляющий орган отрасли. Эти данные используются в отраслевой модели наряду с другими условиями (взаимосвязи между предприятиями, условия транспортировки, потребность в продукции, наличие сырья и т. д.) для расчета оценок на продукцию, сырье и материалы. Каждое предприятие отрасли рассчитывает свой оптимальный план, руководствуясь критерием максимума прибыли в этих оценках. Центральный орган, сопоставляя планы предприятий с общими заданиями и критерием оптимальности отрасли, уточняет оценки, т. е. коэффициенты целевой функции в моделях предприятий. После этого предприятия представляют свои новые планы, уточненные в соответствии с критерием, основанным на новых значениях оценок, и т. д. Более подробно схема взаимодействия моделей предприятий в отраслевой системе изложена в [41].

Венгерские ученые Корнаи и Липтак [38] предложили схему декомпозиции, основанную на корректировке заданий по выпуску продукции и лимитов по использованию ресурсов.

Более общий аппарат для математической формализации и исследования итеративного процесса решения общей модели, при котором каждая итерация состоит в нахождении решения подмоделей, дает схема решения бескоалиционной игры многих игроков [7]. Методы Данцига — Вольфа и Корнаи — Липтака можно рассматривать как частные случаи этой общей схемы.

Алгоритм итеративного согласования моделей подсистем может быть представлен в виде метода последовательного решения игры, в которой на каждом шаге каждый игрок улучшает свою стратегию в соответствии со своим индивидуальным выигрышем.

Принцип гомеостата в условиях выпуклой игры проявляется не просто в том, что всякое состояние системы, отличное от оптимума, вызывает у кого-нибудь из игроков стремление его изменить. Можно доказать (см. [7, п. 12—13]), что в условиях выпуклой игры стремление каждого игрока в направлении максимума своей инди-

видуальной функции выигрыша приводит к движению всей системы к положению равновесия (т. е. к оптимуму).

Пусть задана игра n игроков с выпуклыми множествами допустимых стратегий ($x_k \in X_k$) и функциями выигрыша $\varphi_k(x_k, x)$, $k = 1, \ldots, n$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Будем называть игру выпуклой (или строго выпуклой), если каждая функция $\varphi_k(x_k, x)$ выпукла вниз по x_k или вверх по x_k. Игра называется игрой с нулевой суммой, если $\sum_k \varphi_k(x_k, x) \equiv \equiv 0$. Обозначим через $\hat{x}(x) = (x_1, \ldots, x_n)$ набор оптимальных ответов игроков на набор стратегий $x = (x_1, \ldots, x_n)$, так что

$$\varphi_k(\hat{x}_k, x) = \max_{y_k \in X_k} \varphi_k(y_k, x),$$

и рассмотрим следующий итеративный процесс. Если на t-й итерации игроками выбраны стратегии $x^t = (x_1^t, \ldots, x_n^t)$, то на $(t+1)$-й итерации все они сдвигаются по направлению к своему оптимальному ответу x $(\hat{x}^t)$ на эту ситуацию:

$$x^{t+1} = (1 - \alpha_t)\, x^t + \alpha_t \hat{x}(x^t),\ 0 \leqslant \alpha_t \leqslant 1. \qquad \text{(V.1)}$$

Если последовательность $\{\alpha_t\}$ удовлетворяет условиям

$$\alpha_t \to 0,\ \sum_{t}^{\infty} \alpha_t = \infty, \qquad \text{(V.2)}$$

то такой процесс сходится к точке равновесия. Точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если для выпуклой игры с нулевой суммой функция $\hat{x}(x)$ однозначна, т. е. если имеется единственный набор оптимальных ответов для каждого $x \in X$, то $x \xrightarrow{t} x^*$ $(t \to \infty)$, где x^* — точка равновесия.*

Как показано, например, в работах [7] и [60], эта теорема позволяет применить процесс (V.I) для разработки алгоритмов решения широкого класса задач выпуклого программирования, использующих их блочную структуру. Для этого строится игра, эквивалентная исходной задаче оптимизации. Для широкого класса экономических задач эти игры оказываются удовлетворяющими условию выпуклости и условию нулевой суммы. В частности, таким путем можно получить сходящиеся методы для выпуклого программирования с теми же принципами исследования блочного характера задач, как и в ука-

занных выше алгоритмах Данцига — Вольфа и Корнаи — Липтака [17, п. 12—13]. Условие однозначности функции $\hat{x}(x)$ справедливо для всех строго выпуклых игр.

Это условие не является слишком жестким, поскольку любая выпуклая функция может быть с любой степенью точности аппроксимирована строго выпуклой.

Процесс (V.1) естественно рассматривать как обобщение известного процесса Брауна для решения матричных игр двух лиц. Процесс, предложенный Брауном, получается из процесса (V.1) при

$$\alpha_t \equiv \frac{1}{t}.$$

Легко показать, что если участники игры будут выбирать на каждой итерации непосредственно оптимальные ответы $\hat{x}(x^t)$ на сложившуюся ситуацию x^t, то могут возникнуть незатухающие колебания. Процесс (V.1) можно интерпретировать как корректировку, исправление на каждой итерации стратегии x^t в направлении оптимального ответа $\hat{x}(x^t)$. При этом параметр α^t играет роль «шага итерации». Уменьшение α_t соответствует *демпфированию колебаний*[1] в системе, или *осреднению* последовательно рассчитываемых, *предельных планов и оценок.*

Конечно, класс итеративных методов, определенный для доказательства теоремы, довольно узок, и применение алгоритмов непосредственно из этого класса вряд ли может оказаться достаточно эффективным при решении задач большой размерности ЭВМ.

Однако построение игры, эквивалентной задаче оптимального планирования, дает удобный и эффективный инструмент для построения итеративных методов, моделирующих процессы реального планирования и экономического языка для их исследования.

В применении к игре, описанной в 13⁰, итеративный процесс (V.1) можно интерпретировать так. На каждой итерации органы ценообразования исправляют оценки товаров, повышая их на дефицитные товары и понижая на товары, предложение (производство) которых превышает спрос (потребности). Органы, планирующие

---

[1] Демпфирование — технический термин, означающий подавление, или тушение, колебаний.

производство, корректируют планы в направлении увеличения прибыли, рассчитанной в этих оценках. Органы, планирующие непроизводственное потребление, определяют планы, соответствующие максимальному удовлетворению потребностей общества в пределах выделенного фонда потребления.

К сожалению, непосредственно применить к такому процессу общую теорему о сходимости нельзя, так как функция выигрыша потребителя в игре невыпукла вниз по стратегиям остальных игроков (по ценам p). Данный процесс — частный случай так называемых процессов регулирования цен (см. [35, п. 9.2—9.8]). Чтобы гарантировать его сходимость, нужны дополнительные условия, без которых вопрос о его теоретической сходимости остается открытым.

Однако можно несущественно видоизменить модель так, чтобы теорема оказалась применимой, может быть пожертвовав отчасти убедительностью экономической интерпретации. Предположим, что орган, планирующий непроизводственное потребление, не ограничен заранее фиксированным денежным фондом, но зато может сопоставлять не только различные доступные ему наборы объемов потребляемых ресурсов, но и сами денежные затраты с доставляемым ими повышением уровня потребления. Пусть он стремится к максимизации разности:

$$\varphi_0(x; p) = U(x) - (p, x).$$

В остальном модель не изменяется.

Может показаться, что такое предположение противоречит понятию функции предпочтения, которая может отражать только соотношения предпочтения между наборами, а численные значения ее не несут информации. Однако на самом деле противоречия здесь нет, так как произвольное монотонное преобразование численных значений функции $U(x)$ не изменяет ни параметров производства или потребления (x, y), ни соотношений цен в точке равновесия. Единственно, что может измениться — это масштаб цен, который действительно определяется числовыми значениями функции $U(x)$. Нормировку цен в соответствии с заданным доходом S потребителя можно рассматривать как нормировку функции $U(x)$ в окрестности точки равновесия.

В таком виде игра имеет ту же точку равновесия, совпадающую с точкой оптимума, что и первоначально определенная игра, и годится для применения теоремы о сходимости итеративного процесса.

Важная особенность итеративных методов — их способность давать приближение к оптимуму даже в тех случаях, когда каждое отдельное вычисление (итерация) может содержать случайные ошибки. Это позволяет применить математические методы и при наличии в системе «черных ящиков» (блок принятия неформальных решений). Началом разработки таких методов можно считать теорию стохастической аппроксимации. Обзор основных результатов этой теории на русском языке и библиографию можно найти в [43].

Как уже отмечалось, изложенная игровая теория саморегулирования имеет силу в случае применимости выпуклых моделей. На ее основе может быть организована система взаимоотношений между органами текущего планирования и управления производством, для которых характеристики перспективного плана заданы.

Важное значение имела бы разработка теории взаимоотношений между органами перспективного планирования, в моделях которых большое значение имеет дискретность переменных (вообще наличие локальных экстремумов). Для моделей с дискретными вариантами игровая интерпретация, развития для выпуклых моделей, видимо, может быть использована применительно к их вероятностным характеристикам («смешанные стратегии» и представление о процессе случайного перебора вариантов, см. п. 20°). Однако возможности их экономической интерпретации и применения как основы для построения научной системы саморегулирования в этой ситуации не изучены.

17°. Упрощенные модели критерия оптимальности

Как уже отмечалось, представление о последовательном уточнении моделей имеет важное значение при использовании упрощенных моделей целевой функции в условиях, когда неизвестно ее полное математическое выражение. Пусть известна полная модель производственных возможностей, т. е. записаны все ограничения,

для некоторого производственного комплекса или всей производственной сферы народного хозяйства. Обозначим множество допустимых векторов $x=(x_1,\ldots, x_n)$ затрат и выпуска через X. Целевая функция $u(x)$, отражающая предпочтение общества, пусть, наоборот, остается неизвестной, но имеется некоторый способ или механизм, определения ее градиента в любой точке. Алгоритм решения задачи

$$u(x)\to \max,$$
$$x\in X \tag{V.3}$$

можно интерпретировать следующим образом (см., например, [41]. Целевая функция $u(x)$ заменяется ее линейной аппроксимацией (p, x), где p — вектор цен, и решается задача

$$(p, x)\to \max,$$
$$x\in X. \tag{V.4}$$

Затем вектор c корректируется в соответствии с предпочтением $u(x)$, и снова решается задача (V.3) и т. д.

Если множество X — выпукло, а функция $u(x)$ — строго выпукла вверх, то процесс (V.1) дает способ корректировки цен, приводящий к решению задачи (V.3).

Такой способ нахождения оптимума может оказаться вполне приемлемым в тех условиях, когда разрабатывается план для такой производственной единицы, что изменения этого плана не могут вызвать значительного изменения цен. Когда речь идет о крупном производственном комплексе или о всем народном хозяйстве, то применение такого процесса потребовало бы, возможно, слишком много итераций. Поэтому для построения упрощенной модели имеет смысл постараться использовать больше информации о предпочтении $u(x)$. Это можно сделать, применяя критерий максимизации выпуска в заданных пропорциях (максимизация числа комплектов, см. [2]), т. е. применить аппроксимацию функции $u(x)$ в виде

$$u(x)=\min_l \frac{x_l}{\lambda_l},$$

где $\lambda = (\lambda_1 ..., \lambda_n)$ — заданные пропорции выпуска. В работе [19] описан итеративный алгоритм нахождения оптимума, состоящий в решении на каждой итерации задачи на максимизацию выпуска в заданных пропорциях и последовательном уточнении этих пропорций. В работе [46] предлагается итеративный процесс, близкий к описанному в [19], и доказывается его сходимость к решению задачи (V.3) при условии строгой выпуклости и достаточной гладкости целевой функции $u(x)$ и границы множества X.

Наиболее естественно этот алгоритм выглядит в следующей интерпретации. Пусть x — вектор объемов предметов личного потребления и $u(x)$ — функция предпочтения потребителя. Если s — доход потребителя и p — вектор розничных цен, то функция $x_p(s)$ зависимости спроса от дохода (функция спроса) определяется равенством

$$u(x_p(s)) = \max\{u(x): (p, x) \leqslant s\}.$$

Множество допустимых векторов x обозначим через X. Оптимальным планом производства, соответствующим ценам p, можно назвать вектор x,

1) который максимизирует прибыль, т. е. является решением задачи

$$(p, x) \to \max,$$
$$x \in X,$$

или 2) соответствует максимальному значению дохода s при условиях

$$x \in X, \quad x = x_p(s).$$

Тогда задача, решением которой он является, должна быть записана в виде

$$s \to \max,$$
$$x_p(s) \in X. \qquad \text{(V.5)}$$

Назовем производственными оценками такой вектор v, что решение задачи

$$(v, x) \to \max,$$
$$x \in X$$

совпадает с решением задачи (V.5). Когда решение x задачи (V.5) лежит на границе множества X, то v — вектор нормали гиперплоскости, опорной к множеству X в точке $\hat{x}$. Заметим, что сама кривая $x=x_p(s)$ в пространстве значений вектора x не зависит от масштаба «розничных» цен p, а зависит только от их соотношений. Если соотношения полученных оценок v совпадают с соотношениями «розничных» цен p, то легко проверить, что план $\hat{x}$ оптимален для задачи

$$u(x) \to \max,$$
$$x \in X. \qquad \text{(V.6)}$$

Действительно, из определения оценок v следует, что для всех $x \in X$

$$(v, x) \leqslant (v, \hat{x}).$$

Следовательно, $(p, x) \leqslant \hat{s}$, где $\hat{s} = (p, \hat{x})$, и так как $x_p(s)$, то $u(x) \leqslant u(\hat{x})$.

Таким образом, для совпадения плана $\hat{x}$ с оптимальным планом задачи (V.6) необходимо, чтобы производственные оценки v совпадали с «розничными» ценами p (т. е. с ценами, по которым действует потребитель).

Если оценки v оказываются отличными от цен p, то оценки могут быть использованы для уточнения цен p. Для полученных новых значений цен p (1) могут быть определены новые функции спроса и новое решение $x(1)$ задачи (V.5) и т. д.

Корректировка цен производится по формуле

$$p(t+1) = p(t) + \alpha_t v(t),$$

где t — номер итерации, а α_t удовлетворяют условиям (V.2). При естественном предположении можно доказать, что вектор $x(t)$ (решение задачи (V.5)) на t-й итерации сходится к оптимуму при $t \to \infty$. Предположение может быть интерпретировано следующим образом. Увеличение дохода s без изменения «розничных цен» p должно всегда вызывать увеличение общего объема спроса, рассчитанного в производственных оценках v.

Если аппроксимировать функцию $u(x)$ многочленом второго порядка, то функции спроса $x_p(s)$ аппроксимируются прямыми, и задача (V.5) будет задачей максимизации выпуска в фиксированных пропорциях.

18⁰. Функционирование системы оптимального планирования как человеко-машинной системы

Общая схема процесса разработки плана может быть изложена следующим образом. В любой момент времени имеются все исходные данные для построения модели каждого производственного комплекса. Решение этих моделей дает значения планов затрат и выпуска для комплексов и значения оценок всех ресурсов. Они могут быть использованы как новые исходные данные для построения и уточнения моделей всех других производственных комплексов.

Для обеспечения сходимости итеративного процесса новые значения исходных данных можно не включать непосредственно в модели, а так или иначе использовать как указатели для корректировки значений, принятых на предыдущей итерации.

Такой обмен информацией может быть применен и для описания функционирования системы оптимального планирования в процессе реализации оптимального плана хозяйства. Любое отклонение от этого плана в процессе его реализации в какой-либо отрасли или любое другое возмущение сообщается в смежные отрасли и вызывает изменение параметров их моделей. Возникает рассогласование[2] между планами этих отраслей и исходными данными их моделей (план перестает быть оптимальным). Когда это рассогласование оказывается существенным в некоторой из этих смежных отраслей, принимается решение изменить план (и оценки) и сообщить об изменениях новому кругу смежных отраслей и т. д., пока система не придет снова к согласованности.

В такой схеме каждое звено управления (планирующий орган) вырабатывает план (или оценки), *согласующийся* с информацией об изменениях планов и оценок в других звеньях в смысле его оптимальности по отношению к новым значениям исходных данных своей мо-

---

[2] Этот технический термин используется специально, чтобы подчеркнуть аналогию с техническими системами.

дели. В этом смысле *план, согласованный* по всей системе моделей, *является автоматическим и оптимальным планом,* а управление принимает характер *регулирования по рассогласованиям.*

Если изменение параметров модели происходит достаточно часто, необходимо производить усреднение или прогноз этих изменений как случайной последовательности и рассчитывать план и оценки, оптимальные с точки зрения этих усредненных или прогнозированных значений параметров.

Поэтому каждую хозяйственную единицу или звено системы экономического управления естественно рассматривать как самостоятельно действующую единицу, выбирающую оптимальные решения в изменяющейся среде (при изменяющихся значениях параметров модели).

Описанный выше обмен информацией может производиться много раз, если весь процесс идет внутри электронной вычислительной машины. Однако принцип разложения и итераций выходит за рамки чисто вычислительных методов. Он может быть применен и для описания функционирования системы оптимального планирования как человеко-машинной системы.

Система оптимального планирования должна представлять собой *человеко-машинную систему* в следующем смысле. Как исходная информация для моделей, так и основные результаты расчетов по ним должны регулярно контролироваться и корректироваться человеком:

1) для проверки их соответствия реальности, отражения в них основных черт моделируемой системы;

2) для анализа соответствия результатов расчета целям и интересам общества.

В частности, необходимость неформального анализа моделей и результатов расчета по ним связана с наличием неопределенности в задачах планирования. Решения, принимаемые человеком в условиях неопределенности, труднее всего поддаются формализации.

Рассмотрим возможный порядок функционирования системы оптимального планирования на примере взаимоотношений предприятий с отраслевым планирующим органом.

Пусть составлены модели всех предприятий отрасли и общая отраслевая модель, и тем или иным математи-

ческим методом получено оптимальное решение задачи (план и оптимальные оценки) для всей отрасли, а следовательно, и для всех предприятий. Вслед за этим должен следовать анализ соответствия полученного плана реальным производственным возможностям предприятий. Для этого все показатели плана и оценки, имеющие отношение к данному предприятию, должны быть выданы предприятию. Может оказаться, что полученный план невыполним или что при данных оценках предприятие могло бы получить большую прибыль за счет проведения некоторого организационно-технического мероприятия, которое не представлялось целесообразным с точки зрения исходных оценок. Другими словами, анализ решения может показать необходимость внесения корректировок в исходную модель предприятия. Это вызовет необходимость вторичного пересчета плана отрасли и связанных с ним оценок.

Только в случае, если ни одно предприятие не может представить такого варианта плана, который гарантировал бы ему существенно большую прибыль в оптимальных оценках, чем рассчитанный оптимальный план, считается принятым и обязательным для выполнения (во всяком случае в той степени, в которой от его выполнения зависит работа других хозяйственных единиц), а оценки фиксируются как цены, на основе которых, в частности, исчисляется прибыль как критерий работы предприятий, определяющий их стимулирование. При этом *план может приобретать форму договора* (см. [6]), заключаемого между предприятиями или между предприятием и отраслевым планирующим органом и т. д.

19°. Статистический характер экономической информации и вычислительные алгоритмы оптимального планирования

Отражение реальной системы с помощью математической модели всегда представляет собой гомоморфизм, так что принятие тех или иных значений исходных данных модели всегда сопряжено с игнорированием всей сложности реальных связей, не отраженных в модели. Принятие исходных данных любой модели основано на убеждении в достаточности тех экспериментальных или

теоретических оснований, которые были приняты при их получении, т. е. в той или иной степени *носят характер прогноза.*

Возможные отклонения реальных значений параметров от заданных признаются неуправляемыми, т. е. случайными. Это приводит к выводу, что *исходная информация каждой модели имеет статистический характер.* В силу этого и те параметры, которые рассчитываются в модели и принимаются затем для реализации как управляющие параметры (объемы выпуска продукции, сроки ввода новых мощностей, цены), с определенной вероятностью отклоняются от значений, при которых народнохозяйственный эффект был бы выше, т. е. отклоняются от оптимальности. В моделях текущего планирования (с непрерывными показателями) это выражается в приближенном характере самих числовых значений параметров. Для логических переменных (да — нет), участвующих в перспективных моделях, это выражается в наличии определенной вероятности того, что изменение значения данной переменной могло бы оказаться в реальности более эффективным. Например, в силу неучтенных (случайных) факторов может оказаться весьма эффективным осуществление варианта строительства, отвергнутого на основании расчетов.

Важность статистического подхода к изучению экономики подчеркивал основоположник кибернетики Н. Винер: «Эконометрика не сдвинется с мертвой точки, пока не будут сделаны два следующих шага. Во-первых, необходимо, чтобы все величины, рассматриваемые в эконометрике, такие как спрос, объем запасов и т. п., определялись с такой же степенью точности и строгости, с которой рассчитываются соответствующие динамические процессы. Во-вторых, с самого начала нужно признать статистический и недостаточно точный характер этих величин и вытекающую отсюда необходимость гиббсовского подхода к их исследованию» (Н. Винер. Я математик. М., изд-во «Наука», 1964, стр. 248).

Основная идея термодинамики Гиббса, которую имеет в виду Н. Винер, состоит в возможности выведения зависимостей между макропоказателями на основе определенных предположений о распределении вероятностей возможных комбинаций микропоказателей. Применение экономической статистики фактически всегда сле-

довало этому правилу. Это же, очевидно, должно остаться правилом и в условиях системы взаимодействующих моделей для разных уровней иерархии управления (см. конец настоящего параграфа).

Описанная в начале 18⁰ картина функционирования системы моделей указывает на то, что даже в условиях охвата всех хозяйственных комплексов системой взаимосвязанных математических моделей *исходная информация каждой модели будет иметь характер статистического описания* как *условий производства,* так и *условий управления* (в частности, скорость и точность переработки информации) *в других хозяйственных комплексах.*

С другой стороны в такой трактовке становятся очевидными целесообразность использования идей и понятий теории автоматического регулирования для управления процессом самонастройки системы и даже построение и использование в управлении *моделей автоматического регулирования.* Такие модели должны явиться как бы вторым этажом над описанной выше системой детерминированных моделей оптимального управления.

Наибольший элемент стохастики вносится в модели благодаря невозможности формализовать зависимость производства от деятельности работников, участвующих в нем и им управляющих, зависимость деятельности работников от материального и морального стимулирования, технический прогресс и т. д. Изучение возможного поведения системы в условиях тех или иных способов экономического управления, в частности стимулирования, позволяющее выбрать эффективные формы (варианты) системы управления и значения управляющих параметров, может проводиться с помощью моделей на языке теории автоматического регулирования. Такие модели довольно интенсивно разрабатываются в капиталистических странах (см., например, статьи Г. Гейера и К. Феля в сборнике [47]) в связи с использованием кейнсианских представлений для государственного регулирования экономики.

С точки зрения разработки вычислительных алгоритмов из сказанного выше следует, что нет смысла добиваться большей вероятностной надежности и большей точности числовых значений расчетных показателей модели, чем это позволяют точность и вероятностная надежность исходной информации.

С другой стороны, в условиях большой сложности и изменчивости экономической системы принципиальное значение приобретает задача *нахождения приближенного оптимума и его корректировка при изменении исходных данных за достаточно короткий срок.* В частности, *вопрос о скорости сходимости* алгоритмов оптимального планирования *перестает быть только техническим вопросом.*

Методы оптимизации, как и методы решения систем линейных уравнений, состоят из многократного повторения однотипных операций, которые можно назвать циклами, или итерациями. При этом все методы можно разделить на две большие группы.

К первой относятся те методы, при которых приближение к решению происходит в том или ином смысле монотонно, как, например, симплекс-метод линейного программирования. Как правило, такие методы отличаются определенной жесткостью: в них все операции каждого цикла (итерации) полностью определяются структурой самой задачи и приводят к точному решению за конечное число шагов.

Такие методы будем называть монотонными. В отличие от них, ко второй группе можно отнести *собственно итеративные методы*, в которых нет монотонности приближения к решению. Такие методы обычно не дают точного решения за конечное число шагов. В них каждый «шаг итерации» содержит свободные параметры и может определяться в большой мере свободно в процессе решения. К этой группе следует отнести градиентные методы и их модификации, метод Брауна — Робинсон для решения матричных игр и др.

В применении итеративных методов к разработке вычислительных алгоритмов важное значение имеют различные способы демпфирования колебаний итеративного процесса. Параметрами, управляющими демпфированием, служат те или иные показатели величины шага итерации. Свобода в выборе этих параметров дает возможность так управлять процессом, что скорость сходимости оказывается приемлемой даже в случае очень большой размерности. При решении задач планирования большой размерности эта гибкость итеративных методов имеет, по-видимому, преимущество по сравнению с методами монотонными. В условиях регулярного повторения

расчетов по моделям, структура которых мало меняется со временем, имеется возможность вносить усовершенствования в порядок регулировки итеративного процесса на основе накопленного опыта. Накопление такого опыта следует рассматривать как необходимый при построении сложных систем процесс их *самосовершенствования.*

В условиях, когда проведение каждой итерации связано с обменом информацией между многими плановыми органами и ее неформальным анализом, принципиальное значение приобретает вопрос о предельном сокращении числа итераций. В условиях решения задач большой размерности на ЭВМ за последнее время выявилось преимущество тех методов, при которых каждая итерация предельно проста, и это дает возможность перебрать достаточно большое число вариантов.

В обоих случаях собственно итеративные методы могут оказаться эффективными. Эти методы разработаны в настоящее время значительно слабее, чем методы с монотонным приближением к оптимуму. Однако разработка итеративных алгоритмов для решения задач планирования большой размерности проводится сейчас во многих научных организациях, применяющих экономико-математические методы к решению задач планирования: в Новосибирске в Институте математики СО АН СССР (В. А. Булавский и др.), в Киеве в Институте кибернетики АН УССР (Н. З. Шор и др.), в Москве в Вычислительном центре МГУ (Б. Т. Поляк и др.). По-видимому, общая концепция применения итеративных алгоритмов к задачам планирования выработалась и в ЦЭМИ АН СССР (В. Г. Медницкий, В. И. Данилов-Данильян, А. К. Пителин, см. [48—51]. Все эти исследования подтверждают высокую эффективность итеративных методов.

20⁰. О стохастических методах целочисленного программирования

Как следует из приведенной модели народного хозяйства (7⁰—8⁰), важнейшее значение при перспективном планировании имеют задачи целочисленного программирования, а более общее — задачи с непрерывными и дискретными переменными. Следует отметить, что известные методы точного решения даже задач целочисленного линей-

ного программирования обычно оказываются неэффективными в условиях большой размерности. По-видимому, причина этого не только в малом сроке научных исследований в этой области. Есть даже некоторые основания для предположения, что принципиально не могут быть созданы алгоритмы, гарантирующие решение любой задачи линейного целочисленного программирования с объемом вычислительных операций меньшим, чем потребовал бы полный перебор всех вариантов.

В то же время другая характерная особенность экономических задач — невысокая точность исходных данных и возможность их изменения как в процессе согласования плана данного производственного комплекса с планами других комплексов, так и в процессе реализации плана. Это говорит о том, что основной задачей следует считать не нахождение строго оптимального решения, которое может оказаться неустойчивым, т. е. далеким от оптимума при изменении исходных данных, а скорее нахождение серии решений, близких к оптимуму, выбором из которых можно было бы ограничиться при дальнейшем анализе плана (например, при согласовании его с планами других производственных комплексов).

Опыт решения задач перспективного планирования отраслей (см. [9]) показывает, что в большинстве случаев хорошее приближенное решение задач целочисленного программирования можно получить путем неформального анализа и корректировки решения соответствующей задачи с непрерывными переменными. Дело в том, что если задача поставлена как задача целочисленного линейного программирования с переменными x, принимающими значения только 0 и 1, то замена условия целочисленности на условие $0 \leqslant x \leqslant 1$ сводит задачу к модели линейного программирования, у которых многие компоненты решения могут оказаться равными 0 или 1. Неформальный анализ решения с помощью оценок дает возможность достаточно надежно выделить те из них, которые и при соблюдении требования целочисленности для большинства решений вблизи оптимума должны принимать такие же значения, как в решении задачи без учета этого требования. Таким образом задача может быть значительно сокращена. Однако все же «область неопределенности», в которой благодаря требованию дискретности переменных не могут быть использованы

решение и оценки непрерывной задачи, может оказаться достаточно большой.

Это заставляет искать алгоритмы, которые можно было бы формализовать и использовать при решении на ЭВМ для получения значительного количества решений, близких к оптимуму. В связи с этим особый интерес представляет исследование стохастических методов, или методов случайного перебора, позволяющих благодаря предельной простоте каждой итерации перебирать с помощью ЭВМ большое число вариантов (аналогично итеративным детерминированным методам) [3].

При этом внимание направляется на организацию процесса последовательного перебора вариантов и такое его регулирование, при котором с возможно большей вероятностью удается находить достаточно хорошее решение за фиксированный срок (например, в течение ограниченного времени работы ЭВМ).

Искусственным введением случайности в алгоритм сложность точного решения задачи как бы признается бесконечной, и проблема формулируется на другом языке (на языке более высокого уровня управления).

Для организации таких процессов удобна общая схема: организация процесса перебора в виде марковского блуждания по вариантам решения, переходные вероятности которого формируются в ходе самого процесса. Это дает возможность управлять течением процесса, применяя методы и качественные представления хорошо разработанной теории методов выпуклого программирования, теории автоматического регулирования и любые эвристические соображения для корректировки переходных вероятностей с целью ускорения приближения к оптимуму.

Как известно, в конечной неприводимой (эргодической) цепи Маркова вероятность попасть в любое

---

[3] Описанные ниже методы случайного перебора предложены и исследуются сотрудниками Лаборатории математических методов в биологии МГУ И. И. Пятецким-Шапиро и Л. В. Левиной совместно с сотрудниками ЦЭМИ АН СССР В. А. Волконским, А. Б. Поманским и А. Д. Шапиро. Идеи метода близки к идеям теории игр автоматов (см. [44, 45]). В обсуждении направления работы и результатов активное участие принимал М. Л. Цетлин. Заметка с описанием наиболее простого варианта метода и изложением результатов первых вычислительных экспериментов напечатана в Докладах АН СССР [52].

состояние за конечное число шагов равна единице. При конструировании переходных вероятностей в процессе решения легко соблюсти условия эргодичности цепи. Это гарантирует теоретическую сходимость метода. Однако в силу огромного числа состояний (число вариантов плана имеет порядок 2^n, где n — количество целочисленных переменных) теоретическая возможность достичь оптимума в процессе перебора ничего не доказывает, а свидетельствует только о том, что в стохастических алгоритмах не имеет смысла говорить о сходимости без оценок ее скорости.

Изложим общую схему алгоритма, образованного в различных модификациях на ряде задач.

Рассмотрим задачу определения оптимальных вариантов развития и специализации предприятий в отрасли, сформулированную в 8⁰. Каждый план характеризуется набором номеров j_k вариантов развития по одному для каждого предприятия: $\bar{J} = [j(1), \ldots, j(N)]$. Будем рассматривать наборы $\bar{J}$ как состояния дискретной цепи Маркова (всего $\prod_{k=1}^{k} n_k$ состояний) и моделировать с помощью ЭВМ процесс случайного блуждания (случайный итеративный процесс), формируя переходные вероятности в ходе самого процесса.

Например, это можно сделать следующим путем. Обозначим через $p^k = (p_1^k, \ldots, p_{n_k}^k)$ распределение вероятностей для выбираемого варианта строительства k-го объекта (распределение величины j номера варианта). Одна итерация состоит в том, что с помощью программы случайных чисел разыгрывают (находят случайные реализации) независимо одно от другого номера вариантов j (k) для каждого объекта k. Затем рассчитывают вектор выпуска отрасли:

$$y_i = \sum_k a_{ij(k)}^k, \; i = 1, \ldots, J,$$

где a_j^k — объем выпуска i-й продукции k-м объектом по j-му варианту специализации, и совокупную величину затрат $\sum_k Z_{j(k)}^k$. Затем в соответствии с разностями $y_i - m_i$ и вели-

чиной затрат $\sum_k Z^k_{j(k)}$ изменяют распределения вероятностей p^k. Затем следует новая итерация. Поскольку разности $y_i - m_i$, а следовательно, и распределения вероятностей p^k определяются по набору вариантов $\overline{J} = \{j\ (k),\ k = 1, \ldots,\ N\}$, т. е. по состоянию цепи, то зависимость распределений p^k, $k = 1, \ldots,$ K от разностей $y_i - m_i$ и величины $\sum_k Z^k_{j(k)}$ определяет переходные вероятности этой цепи.

Основной интерес представляет возможность управлять течением итеративного процесса, используя различные конкретные формы связи распределений p^k с невязками $y_i - m_i$ и величиной затрат $\sum_k Z^k_{j(k)}$.

Было испробовано несколько вариантов алгоритма. Хорошие результаты дал следующий метод, основанный на идеях итеративных методов линейного и выпуклого программирования [4].

Если заменить в рассматриваемой задаче требования целочисленности переменных δ^k_j на ограничения $0 \leqslant \delta^k_j \leqslant 1$, то итеративный процесс может заключаться в следующем. Вводится вектор π оценок, соответствующий второй группе ограничений (II. 7). На каждой итерации эти оценки корректируются в зависимости от невязок $m_i - y_i$, и по ним подсчитываются «прибыли» $\pi\ a^k_j - Z^k_j$. Для каждого предприятия (k) выбирается тот вариант развития $(j\,(k))$, которому соответствует максимальная «прибыль». Полученный план (набор параметров $j(k)$, $k = 1, \ldots,\ N$) является «оптимальным ответом» на оценки π (в смысле общего описания итеративного алгоритма в 16°). Осреднение этих ответов в соответствии с общей формулой (V.1) приводит к оптимальному решению задачи линейного (нецелочисленного) программирования.

Алгоритм для целочисленной задачи отличается от описанного тем, что осредненное решение, полученное на каждой итерации, принимается за распределение вероятностей $p^k (k = 1, \ldots, N)$ для случайного выбора варианта развития $j^*(k)$ (заметим, что $j^*(k)$ может не соответствовать варианту $j\ (k)$, выбранному по условию максимума прибыли).

---

[4] Вычислительные эксперименты проводились А. Б. Поманским и А. Д. Шапиро.

Применение своеобразных методов сокращения размерности в больших задачах путем разложения задачи на несколько частей меньшей размерности и фиксирования ряда компонент вектора решения описано в работе [53][5].

Как уже говорилось, описанный статистический метод представляет наибольший интерес в связи с возможностью в процессе итераций перебрать большое число вариантов плана (состояния цепи Маркова) в окрестности оптимума и установить статистические зависимости типа регрессии между укрупненными показателями, например такими, как зависимость величины прибыли или валового выпуска от капитальных затрат и затрат труда в целом по отрасли, получить устойчивые коэффициенты капитальных затрат (см. 26^0, коэффициенты K (τ) в формуле (VI.5)) и т. д.

Другими словами, применение этого подхода даст возможность строить *производственные функции* отраслей производства для моделей в укрупненных показателях, используя не только отчетную информацию (данные пассивного эксперимента), но и все многообразие возможных плановых вариантов.

Целочисленные отраслевые модели большой размерности, решаемые тем или иным методом случайного перебора, представляют идеальное поле применения статистических методов. Если в настоящее время при отсутствии моделей отраслевого планирования такие параметры определяют по весьма ограниченному числу точек (временные ряды или характеристики существующих предприятий отрасли), то в процессе последовательного перебора вариантов плана на ЭВМ можно получить выборки практически неограниченного объема.

Отметим, что коэффициенты самих моделей (II.7) и (II.8) тоже следует рассматривать как статистические показатели. Например, длительность строительства объектов и связанные с ним затраты по годам могут быть определены на основе сетевых графиков, которые, как известно, давно анализируются статистическими методами (PERT и др.).

---

[5] Вычислительные эксперименты проводились Л. В. Левиной.

VI. ВЫЯВЛЕНИЕ СТРУКТУРЫ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СВЯЗЕЙ. АГРЕГИРОВАНИЕ

21⁰. Об устойчивости показателей в моделях оптимизации

Алгоритмы итеративного согласования моделей весьма разнообразны. Они могут различаться на разных уровнях иерархии и для согласования моделей с различной спецификой в соответствии с требованием обеспечения наибольшей простоты вычислительных операций и наибольшей скорости сходимости процесса. Выполнение этих требований достигается путем рационального разбиения модели на подмодели (модели подсистем), по возможности более автономные, независимые друг от друга, так что большая часть их исходных данных достаточно мало зависит от изменений параметров других подмоделей. Только в той мере, в какой возможно выделить такие подмодели, разложение оправдано с точки зрения увеличения скорости сходимости итеративного процесса.

Поясним этот тезис на примере. При расчетах по модели оптимального планирования развития отрасли нефтяного машиностроения оценки отдельных видов изделий этой отрасли могут значительно колебаться во времени в зависимости от сроков ввода в действие выпускающих предприятий, так как от этого зависит, какие из видов изделий становятся наиболее дефицитными в данный момент. В то же время эти колебания могут оказать существенно меньшее влияние на оценку нефти в народном хозяйстве, так как она определяется в большой мере оценками заменяющих ее видов топлива. По-

этому использование в качестве исходных данных оценок на изделия данной отрасли гораздо менее рационально с точки зрения выделения автономной модели, чем оценок нефти.

Важнейшее значение для выделения автономных моделей имеет выявление *устойчивых* связей и величин, мало меняющихся при изменениях параметров других моделей системы и при случайных возмущениях, не отраженных в моделях оптимизации.

Процесс создания любой сложной системы всегда проходит *путь длительного совершенствования, обучения, проб и ошибок.* В наибольшей мере это относится к социальным и экономическим системам, в которых изучение истории и существующей практики не может быть заменено абстрактными выкладками. Нельзя представлять себе создание системы оптимального планирования в виде единичного акта творения, она не может быть «придумана».

Большинство моделей и методов оптимального планирования есть результат научной абстракции характерных черт того экономического механизма, который создан в результате тысячелетней хозяйственной практики человечества и полувекового опыта социалистического планового руководства хозяйством.

Возможность построения эффективной системы моделей оптимального планирования, охватывающей все хозяйство, определяется в основном возможностями их упрощения и повышения надежности предсказаний путем выявления наиболее устойчивых показателей системы и способов декомпозиции, обеспечивающих наибольшую автономию подсистем. В этом отношении большое значение при построении моделей оптимизации может иметь использование опыта плановиков-практиков.

Проверка устойчивости связей и постоянства параметров может производиться путем вычислительного эксперимента, при котором исходные данные математической модели варьируются по тому или иному закону. В связи с этим приобретают важное значение *методы оценки устойчивости параметров решения по информации, получаемой в ходе итеративного вычислительного процесса нахождения оптимального решения модели.*

В работе [48] исследуется вопрос об оценке по такой информации устойчивости коэффициентов линейной ап-

проксимации производственных возможностей отрасли на примере целлюлозно-бумажной промышленности (прокатная оценка оборудования, входящая в цену единицы продукции) и общего объема валового конечного продукта. Наиболее перспективным представляется изучение устойчивости показателей путем статистического моделирования производственных комплексов (см. [54]), при котором модель оптимизации является частью алгоритма управления. В этом случае колебания исходных данных задачи оптимизации представляют собой случайные процессы, имитирующие процессы их изменений в реальности.

Другой способ проверки устойчивости показателей — непосредственная обработка большого статистического материала. Такой путь в настоящее время основной при построении макроэкономических моделей, т. е. моделей всего народного хозяйства в укрупненных показателях, и моделей потребления. Например, выяснение устойчивости зависимостей потребления различных благ от дохода может быть проведено на основе статистики бюджетных обследований (см. [24]).

Важнейший инструмент для построения моделей, обладающих известной автономностью,— оценки ресурсов, используемых и производимых на многих предприятиях (например, различные виды топлива). На использовании этого обстоятельства основывается рациональность применения метода декомпозиции, описанного в 16⁰, как алгоритма расчетов по отраслевым моделям в силу того, что отрасли объединяют, как правило, более или менее сходные предприятия. В то же время на более высоком уровне иерархии, при объединении отраслевых моделей в модель народного хозяйства более устойчивыми, чем оценки, могут оказаться объемы потребностей или производства ресурсов (ср. 22⁰).

Практика управления хозяйством давно выработала следующие важные способы получения автономных подсистем и устойчивых показателей, специфических именно для экономических систем: построение системы управления в соответствии с технологической последовательностью переработки исходного сырья и агрегирование, которое выражается в использовании укрупненных финансовых (стоимостных) показателей. Настоящий раздел посвящен экономико-математическому анализу этих

ного управления и планирования. В следующем разделе рассматривается вопрос о построении и использовании системы цен.

22⁰. Возможный подход к выявлению структуры производственных связей и типизации моделей оптимального планирования

Важный метод выделения автономных подмоделей для обеспечения приемлемой скорости сходимости процессов составления и корректировки планов — рациональное отражение в системе моделей структуры производственных связей. Иерархический принцип подчинения — основа построения системы моделей. Критерием при выборе конкретных способов описания структуры хозяйства, способов объединения и разделения подсистем должны служить *количество и сложность внутренних связей* (например, количество промежуточных продуктов, ограничений по возможностям различных видов оборудования и т. д.) *по сравнению с внешними* (число видов продукции и сырья и устойчивость цен на них и т. д.). Чем более сильны и сложны внутренние связи и чем более слабы и просты внешние, тем более целесообразно выделение данной подсистемы для описания ее самостоятельной подмоделью в системе моделей.

Этот очевидный принцип приблизительно соответствует реальной структуре управления (отрасли, предприятия и т. д.).

Как уже говорилось, в силу того, что отрасль, как правило, состоит из предприятий, сходных по номенклатуре затрачиваемых или производимых ресурсов, для модели и алгоритма отраслевого планирования оказывается приемлемой та или иная модификация схемы Данцига — Вольфа, качественно описанная в 16⁰.

Ввиду того, что большая часть продукции одних отраслей представляет сырье для производства в других отраслях, модель и алгоритмы объединения отраслевых планов в общий план народного хозяйства должны быть существенно иными. Для использования специфики межотраслевых связей важное значение имеет выявление *упорядочения отраслей по глубине переработки исходно-*

го сырья. Такое упорядочение в основном соответствует движению от добывающих отраслей к обрабатывающим.

Рассмотрим модель (II.1) для общей задачи текущего планирования, записанную через модели того же типа для отраслей.

В качестве хозяйственных комплексов с номерами $k = 1, 2, \ldots, K$ рассматриваются отрасли производства (по-видимому, целесообразно взять несколько сотен по возможности более однородных отраслей).

Будем снабжать все характеристики k-й отрасли верхним индексом k. Пусть все векторы и матрицы, характеризующие выпуск и затраты внешних ресурсов отраслей, записаны для единой номенклатуры ресурсов (дополнены, где надо, нулевыми элементами). В этих обозначениях общая модель запишется так:

$$\begin{gathered} \sum_k a^k x^k = y, \\ b^k x^k \geqslant 0, \\ C^k x^k \leqslant m^k, \\ x^k \geqslant 0, \; k = 1, 2, \ldots, K. \end{gathered} \tag{VI.1}$$

Разобьем конечные ресурсы, по которым составлена первая группа уравнений (VI.1) (балансовые уравнения) на K групп, относя каждый вид продукции к той отрасли, которая его основной производитель. Это разбиение необязательно должно приводить к образованию «чистых отраслей», как это делается при составлении межотраслевого баланса. При этом матрица a^k затрат и выпуска внешних ресурсов для отрасли K разобьется на K матриц a^{lk} ($l = 1, \ldots, K$). Соответственно, вектор y разобьется на K векторов y^k.

Выявление технологической структуры народного хозяйства в разрезе K отраслей означает выявление групп отраслей, наиболее тесно связанных между собой, и установление такого порядка между этими группами, который соответствует последовательности по глубине переработки исходного сырья, т. е. в наибольшей степени исключает обратные связи.

Рассмотрим агрегированную модель (см. 24⁰), в которой каждой отрасли соответствует один способ производства и один продукт. В модели (VI.1) это соответствует тому, что

величины x^k не векторы, а числа, и a для каждой пары (l,k) также не матрица, а число (матрица 1×1) (см., например, [18]). Предположим, что агрегирование проводится с помощью приближенно-оптимальных значений оценок и интенсивностей x, так что элементы a^{lk} имеют размерность стоимостных потоков. При этом агрегированные величины x и p будут носить характер индексов, принимающих значения, близкие к единице.

Выявление технологической структуры для такой агрегированной модели на математическом языке можно выразить как приведение матрицы $A = \| a^{lk} \|_{K \times K}$ к блочно-треугольному виду. Для выявления структуры можно предложить следующую процедуру.

В матрице A тем или иным способом устанавливается новый порядок (новая нумерация) отраслей (строк и столбцов), так что матрица принимает вид, изображенный на рис. 2 (изображен случай разбиения на четыре группы), где незаштрихованные квадратики имеют по возможности мало ненулевых элементов и (или) эти элементы малы по сравнению с элементами в заштрихованных квадратиках. Понятие о «малости» этих элементов будет уточнено в дальнейшем. Если незаштрихованные квадратики заменить чисто нулевыми матрицами, то вся матрица примет блочно-треугольный вид. Такое упорядочение, или перенумерация, отраслей означает, что предшествующими объявляются отрасли, поставляющие продукцию во многие другие отрасли производства и потребляющие продукцию немногих отраслей, т. е. в основном отрасли, характеризуемые меньшей глубиной обработки исходного сырья. Для краткости направление, соответствующее переходу к отраслям с большими номерами, будем условно называть направлением от добывающих отраслей к обрабатывающим.

Процедуру перенумерации строк и столбцов и замену «малых» элементов нулями с целью приведения матрицы к блочно-треугольному виду будем называть выявлением структуры матрицы.

Математическое определение понятия структуры матрицы зависит от определения «малых» элементов (несущественных связей, соответствующих незаштрихованным квадратикам на рис. 2). Смысл выделения существенных элементов состоит в том, что при решении задач оптимального программирования или систем ли-

нейных уравнений может быть применен итеративный процесс, при котором на каждой итерации решается задача только с матрицей существенных элементов, а малые, несущественные элементы учитываются путем корректировки вектора ограничений (в нашем случае вектора конечного продукта y). При этом число таких итераций оказывается тем меньше, чем меньшие элементы

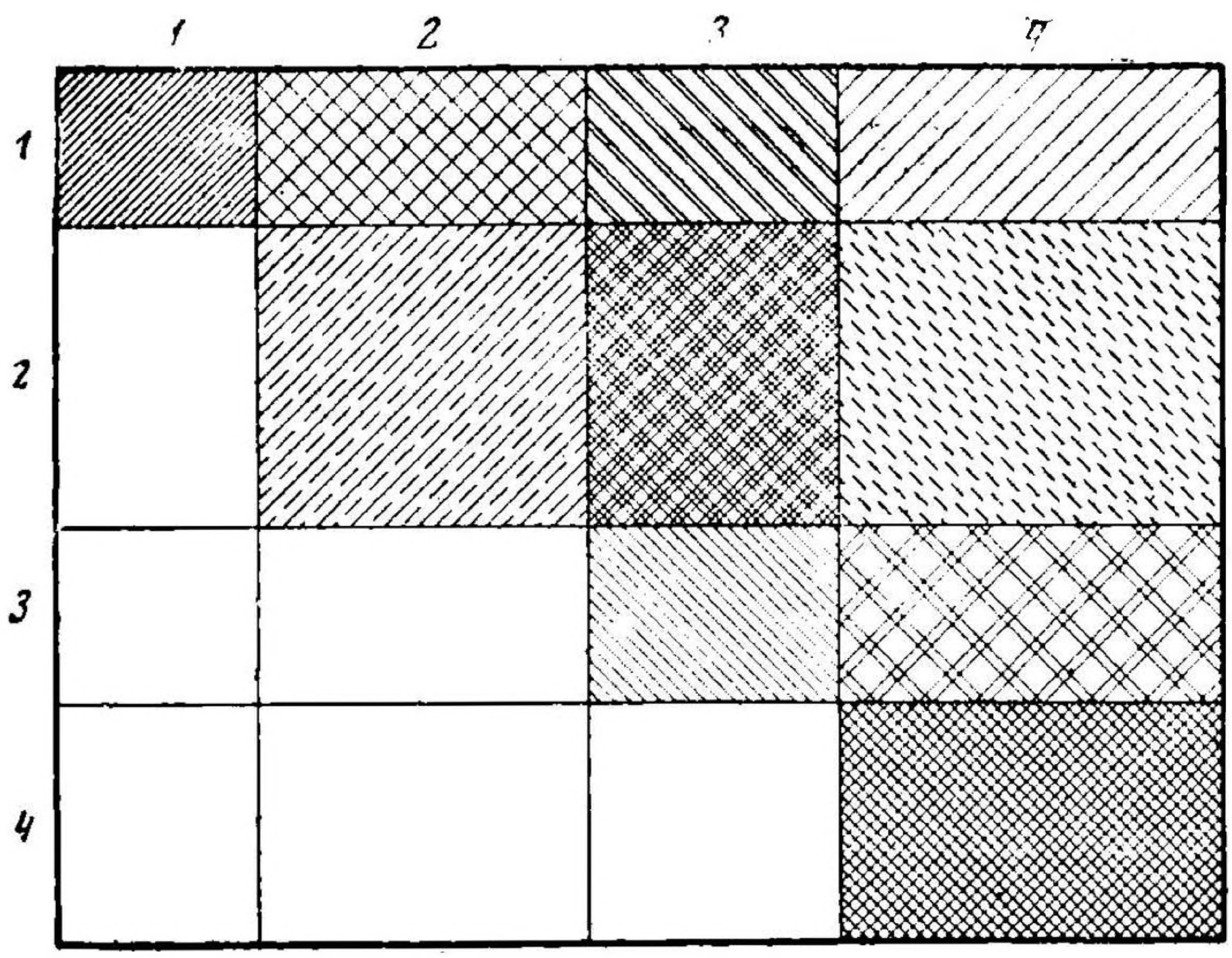

Рис. 2

считаются несущественными. Математическое описание этого факта дается в [55].

Различные способы выявления структуры матриц предлагаются в работах [56—59]. Возможно, что удовлетворительное упорядочение можно получить просто по величине той доли, которую составляет конечный продукт (накопление и непроизводственное потребление) в общем выпуске каждой отрасли. Развитие и сочетание этих методов может дать надежный инструмент для практического выявления структуры матриц межотраслевых связей высокого порядка.

Выявленное таким способом разбиение отрасли на группы естественно принять за новое деление хозяйства на отрасли (более крупные!). Таких отраслей, по-видимому, целесообразно выделить несколько десятков. Это

число зависит от способа разделения элементов матрицы A на существенные и несущественные.

Теперь, не ограничивая общности, мы можем считать, что исходная модель (VI.1) содержит в качестве K хозяйственных комплексов именно эти новые отрасли. Предположим для определенности, что критерий опти-

	x^1	x^2	x^3	x^4	u^1	u^2	u^3	u^4	
P^1	a^{11}	a^{12}	a^{13}	a^{14}	$-\beta^{-1}$	0	0	0	$\geqslant\alpha^1$
π^1	b^1	0	0	0	0	0	0	0	$\geqslant 0$
q^1	c^1	0	0	0	0	0	0	0	$\geqslant m^1$
P^2	0	a^{22}	a^{23}	a^{24}	0	$-\beta^2$	0	0	$\geqslant\alpha^2$
π^2	0	b^2	0	0	0	0	0	0	$\geqslant 0$
q^2	0	c^2	0	0	0	0	0	0	$\leqslant m^2$
P^3	0	0	a^{33}	a^{34}	0	0	$-\beta^3$	0	$\geqslant\alpha^3$
π^3	0	0	b^3	0	0	0	0	0	$\geqslant 0$
q^3	0	0	c^3	0	0	0	0	0	$\leqslant m^3$
P^4	0	0	0	a^{44}	0	0	0	$-\beta^4$	$\geqslant\alpha^4$
π^4	0	0	0	b^4	0	0	0	0	$\geqslant 0$
q^4	0	0	0	c^4	0	0	0	0	$\leqslant m^4$

Рис. 3

мальности для всей модели текущего планирования выбран в форме максимизации некоторой функции от числа комплектов конечной продукции каждой отрасли. Пропорции выпуска конечной продукции по отраслям задаются векторами $\beta^1, \ldots, \beta^k$. Точнее, к ограничениям (IV.1) добавляются условия

$$y^k \geqslant \alpha^k + \beta^k u^k, \quad (k = 1, \ldots, K),$$
$$\varphi(u) = \max,$$

где α^k, β^k $(k = 1, \ldots K)$—заданные векторы; $u = (u^1, \ldots, u^K)$ — искомый вектор; $\varphi(u)$— заданная функция.

Рассмотрим случай линейной аппроксимации функции $\varphi(u)$:

$$\varphi(u) = \sum_k Z^k u^k.$$

В этом случае общая структура полученной задачи линейного программирования может быть представлена в виде, изображенном на рис. 3 (слева указаны обозначения оценок соответствующих групп ограничений).

Вместо матриц a^{kl} при $k > l$ поставлены нули, чтобы подчеркнуть выявленную блочно-треугольную структуру. Сведение исходной задачи к этому виду возможно с помощью следующего приема. Пусть $x(0)$ и $p(0)$ — приближенные значения плана и оценок. Пользуясь малостью элементов матриц a^{kl} $(k > l)$, можно получить хорошее приближение, учитывая затраты, соответствующие этим матрицам, как заданные векторы $a^{kl}\ x^l(0)$ и относя их в правую часть неравенств, т. е. векторы «конечного продукта» y^k рассчитывать, включая в него величины $\sum_{l=1}^{k-1} a^{kl}\ x^l(0)$. В условиях длительного итеративного процесса (при большом числе итераций) эти величины (векторы) могут периодически заменяться величинами $\sum_{l=1}^{k-1} a^{kl}\ x^l(t)$, где $x^l(t)$ — план, полученный на t-й итерации. Математический аспект условий законности применения этого приема разбирается в [55].

Аналогичный прием может быть применен также для использования блочно-треугольного вида матрицы в итеративном процессе уточнения оценок.

В силу сложности отраслевых моделей и необходимости неформального анализа с целью проверки их соответ-

ствия реальности, как правило, при расчетах народнохозяйственного плана их решение должно проводиться одновременно. Такой алгоритм может быть построен на основе игровой схемы, которая описана в 16⁰. В 24⁰ будет описан алгоритм решения системы отраслевых моделей во взаимодействии с агрегированной народнохозяйственной моделью.

В случае, когда уже получен приближенно-оптимальный план и речь идет о его уточнении, более эффективным может оказаться *последовательный порядок* решения отраслевых моделей, и этот порядок естественно выбирать, пользуясь упорядочением по глубине обработки исходного сырья.

Можно предложить, например, следующий итеративный процесс улучшения плана и оценок в модели, изображенной на рис. 2, использующий выявленную в ней технологическую структуру. Обозначим через $x(t)$ и $p(t)$ векторы плана и оценок, полученные на t-й итерации. Тогда естественно применить, например, следующий метод, аналогичный методу Зейделя для решения систем линейных уравнений (см., например, [79]) или методу динамического программирования. Сначала решается задача Z_1:

$$Z^1, u' = \max,$$

$$u'' x' - \beta' u' \geqslant \alpha' - \sum_{k=2}^{K} a^{1k} x^k(t),$$

$$b' x' \geqslant 0,$$

$$c' x' \leqslant m',$$

$$x' \geqslant 0.$$

Оценки первой группы ограничений обозначаются через $p'(t+1)$. Затем решается задача L_2:

$$[p'(t+1)\, a^{12}]\, x^2 + Z_2 u^2 = \max,$$

$$a^{22} x^2 - \beta^2 u^2 \geqslant \alpha^2 - \sum_{k=3}^{K} a^{2k} x^k(t),$$

$$b^2 x^2 \geqslant 0,$$

$$c^2 x^2 \leqslant m^2,$$
$$x^2 \geqslant 0$$

и т. д.

Последняя отраслевая задача имеет следующий вид:

$$\left[\sum_{k=1}^{\kappa-1} p^k (t+1)\, a^{kK}\right] x^K + Z_K u^K = \max,$$
$$a^{KK} x^K - \beta^K u^K \geqslant \alpha^K,$$
$$b^K x^K \geqslant 0,$$
$$c^K x^K \leqslant m^K,$$
$$x^K \geqslant 0.$$

Затем проводится последовательное решение тех же задач в обратном порядке, причем в каждой задаче правые части первой группы ограничений корректируются с учетом значений $x^k(t+1)$, вновь полученных при решении задач для предыдущих отраслей. Затем проводится следующий цикл расчетов. При этом ускорения сходимости можно добиться с помощью применения того или иного метода *демпфирования* колебаний, подобных описанным в работах [48—51].

Таким образом, в описанном процессе поток информации, идущий в направлении от отрасли 1 к отрасли K (от отраслей добывающих к отраслям обрабатывающим), в основном используется для уточнения коэффициентов целевой функции, или оценок затрат для последующих отраслей, а обратный поток — для уточнения заданий по выпуску продукции в моделях последующих отраслей.

Можно ожидать, что такой порядок (направление движения) расчета отраслевых задач окажется экономным в смысле уменьшения необходимого числа итераций (пересчетов отраслевых задач) в том случае, когда уже имеется хорошее приближение к решению, или при необходимости корректировки оптимального плана в тех случаях, когда возникает изменение исходных данных в небольшом числе отраслевых моделей (например, вводится в строй новое предприятие, изменяется конечный спрос и т. п.). В последнем случае, возможно, потребует-

ся пересчет только по моделям нескольких отраслей, соседних с отраслью, претерпевшей возмущение.

Из предыдущего изложения следует, что система моделей оптимального планирования должна включать в себя модели, обладающие существенной спецификой, оперирующие показателями дискретными и непрерывными и показателями разной степени укрупнения. Целесообразно выделить эти модели в несколько типовых конструкций и разработать методы и алгоритмы их объединения в более сложные системы. Такие модели можно предложить для моделей текущего планирования.

Как уже говорилось, матрицы-блоки с малыми элементами были заменены нулями для выявления технологической структуры задачи и связанного с ней порядка расчетов по уточнению плана. Выше был намечен порядок учета этих матриц в итеративном алгоритме с помощью корректировки правых частей прямой и двойственной формы отраслевых задач. Явное включение этих откинутых первоначально матриц в формулировку задачи приведет к следующему общему виду модели k-й отрасли: задача $L_к$

$$\left(\sum_{l \neq k} p^l a^{lk}\right) x^k + Z_k u^k = \max,$$

$$a^{kk} x^k - \beta^k u^k \geqslant \alpha^k - \sum a^{kl} x^l,$$

$$b^k x^k \geqslant 0,$$

$$c^k x^k \leqslant m^k,$$

$$x^k \geqslant 0.$$

Векторы p^l и x^l для $l \neq k$ считаются заданными.

Как видим, эта форма представляет собой конкретизацию модели производственного комплекса, сформулированной в 5^0, при котором ресурсы k-й группы лимитированы (продукция рассматриваемой отрасли), остальные ресурсы (в основном представляющие материальные затраты) считаются нелимитированными.

Подчеркнем еще раз, что предлагаемая конкретизация не должна рассматриваться как найденная наилучшая форма унификации и типизации отраслевых моделей. Это надо рассматривать скорее как начальную гипотезу. Решение этой проблемы будет найдено только в

результате разработки и анализа большого количества конкретных моделей.

Рассмотрим два частных случая.

1. Увеличение продукции данной (k-й) отрасли сверх потребностей производственного потребления в других отраслях $\left(-\sum_{l\neq k} a^{kl}x^l\right)$ и фиксированных объемов непроизводственного потребления (α^k) не имеет значения для народного хозяйства (в частности, длительное хранение продукции невозможно или нецелесообразно). На языке модели это означает, что $Z^k = 0$ при $\beta^k \geqslant 0$.

В этом случае модель можно интерпретировать как задачу *минимизации текущих переменных затрат (или максимизации прибыли) при выполнении заданий по выпуску продукции.*

2. Текущие переменные затраты не играют существенной роли в выборе плановых вариантов по сравнению с настоятельностью потребности в продукции отрасли со стороны народного хозяйства. На языке модели величинами $\sum_{l\neq k} p^l a^{lk}$ можно пренебречь. Этот случай может быть интерпретирован как задача *максимизации продукции в заданных пропорциях при выполнении некоторых обязательных заданий на выпуск продукции.*

23°. Агрегирование и построение упрощенных моделей

Иерархия моделей в соответствии с принципом подчинения части целому приводит к образованию на высших уровнях гигантских моделей, расчеты по которым возможны только после разложения моделей на относительно автономные подмодели и согласования их с помощью итеративного процесса. Для получения приемлемой скорости сходимости итеративного процесса в модели большой сложности важнейшее значение имеет хорошее начальное приближение параметров подмоделей. Поэтому наряду с детализированными моделями, как правило, хозяйственные комплексы должны иметь упрощенные модели, способные дать хорошие начальные приближения для основных показателей. Как уже гово-

рилось, это особенно важно в связи с возможностью применять модели линейного программирования и близкие к ним модели с непрерывными (укрупненными) переменными на высших уровнях иерархии, в то время как на более низких уровнях пренебрежение дискретностью переменных и другими причинами возникновения относительных экстремумов оказывается недопустимым. К тому же выводу приводит требование постоянного неформального анализа моделей и результатов расчета для проверки их соответствия реальным условиям производства и интересам общества на всех уровнях управления (см. 18⁰).

Однако роль моделей в укрупненных показателях не ограничивается получением начального приближения. Исследование алгоритмов *итеративного агрегирования* в линейных моделях (см. 24⁰) свидетельствует о возможности и эффективности взаимодействия моделей в агрегированных показателях с детализированными моделями подсистем в течение всего итеративного процесса нахождения (точного) оптимума. Эти исследования открывают путь конструктивного *разрешения вопроса о приемлемости средних и предельных показателей в оптимальном планировании.*

Как известно, показатели оптимального плана всегда предельны. Однако в случае линейных моделей эффективность всех производственных способов, вошедших в оптимальный план, рассчитанная по оптимальным оценкам (с учетом всех ограниченных ресурсов), одинакова (равна нулю).

Поэтому в определенном смысле эффективность и затраты всех способов являются также средними по тем способам, которые реализуются в оптимальном плане.

Это свойство может быть использовано для построения итеративного алгоритма взаимодействия моделей в укрупненных и детализированных показателях и получения точного решения. В связи с этим иерархическая система взаимосвязанных моделей оптимального планирования может мыслиться как такая система, в которой модели высоких уровней иерархии оперируют более укрупненными показателями и могут быть составлены из упрощенных моделей систем низших уровней. Так, например, модель отрасли может быть построена из упрощенных моделей предприятий, представляющих собой

выпуклую комбинацию нескольких опорных планов (см. [18, 60]).

В соответствии с этим в моделях различной детализации элементарными единицами могут быть различные хозяйственные объекты. В детализированных моделях текущего планирования или оперативного управления предприятием в качестве элементарной единицы может выступать технологическая операция. В моделях народнохозяйственного планирования элементарной единицей может служить отрасль производства, представленная своей упрощенной моделью в виде вектора затрат и выпуска и ограничением производственных возможностей в виде одного неравенства. В моделях перспективного развития отраслей элементарной единицей обычно служит предприятие, представленное вариантами строительства или реконструкции (см. [9]).

Следует подчеркнуть, что так же, как выбор конкретной формы локального критерия для отдельного хозяйственного комплекса, система агрегирования, приводящая к построению упрощенных моделей, определяется в неразрывной связи с общим алгоритмом нахождения оптимального плана.

Важнейшее требование, которому должна удовлетворять система агрегирования, точнее, выбор укрупненных показателей,— *устойчивость* их самих или связей между ними, вообще, возможность построить с их помощью достаточно автономную модель. Большим шагом вперед в развитии экономико-математической науки явилось в свое время построение межотраслевого баланса и использование в планировании того факта, что показатели коэффициентов прямых затрат гораздо более консервативны, чем объемы валового и конечного выпуска.

В частности, в моделях типа межотраслевого баланса выбор рациональной системы агрегирования заключается в объединении таких групп отраслей, которые сильно связаны взаимными поставками или взаимозаменяемостью их продукции в процессе ее потребления (использования). Агрегирование таких отраслей приводит к улучшению обусловленности балансовой матрицы.

Прием агрегирования, постоянно используемый на практике,— основной метод выбора укрупненных показателей и построения упрощенных моделей. Важнейшее

достоинство этого приема то, что при его применении не теряются возможность наглядной экономической интерпретации всех полученных показателей и простота качественного анализа модели и результатов расчета. Для линейной модели метод агрегирования состоит в объединении строк (ограничений) и столбцов (неизвестных). Объединение ограничений можно производить путем почленного суммирования с некоторыми весами. *В качестве весов при агрегировании ограничений*, как правило, *лучше всего выбирать оценки соответствующих ограничений* (цены или прокатные оценки) или их приближенные значения, так как они характеризуют относительную или сравнительную жесткость ограничений, возможность и целесообразность их ослабления.

Интенсивности производственных способов не имеют такого универсального соизмерителя, как ценностное измерение ресурсов. При агрегировании столбцов (производственных способов) обычно используют *фиксирование* определенных *пропорций между интенсивностями* группы способов, что соответствует *фиксированию определенного режима* работы всего производственного комплекса или его подсистемы (группы столбцов). *Понятие технологического маршрута* — частный случай режима работы производственного комплекса.

Агрегирование в модели (II.1) приводит к упрощенной модели того же общего вида, но имеет меньшее число неизвестных и ограничений.

Большое значение имеет разработка методов рационального агрегирования (разбиение на группы строк и столбцов матрицы, выбор опорных планов). Пока, по-видимому, основную роль в этом вопросе должны играть не математические методы, а качественные соображения и опыт, накопленный при конкретном планировании, которые позволят выявить и использовать свойства взаимозаменяемости и комплектности для рационального агрегирования.

В работах [61, 8, 62, 63, 55] описаны итеративные методы взаимного уточнения детализированных и упрощенных моделей, построенных на основе принципа агрегирования. Итеративный процесс такого типа для решения модели, сформулированной в 22⁰, будет описан в 24⁰. В работах [64, 65] дается доказательство сходимости метода итеративного агрегирования для важных частных

случаев решения системы линейных уравнений. Эти результаты позволяют надеяться получить теоремы сходимости также для более общего вида систем линейного уравнения и задач линейного программирования.

Важный метод построения упрощенной модели предложен В. Ф. Пугачевым [18]: *аппроксимация производственных возможностей хозяйственного комплекса* с помощью одного линейного неравенства или выпуклой комбинацией нескольких опорных планов. Конкретная схема использования этого метода для перехода от модели завода к модели отрасли на примере нефтеперерабатывающей промышленности описана в [60]. В работе [48] описано получение важнейшего частного случая такой аппроксимации в процессе итеративного решения детализированной модели.

Целесообразно рассмотреть его как частный случай метода агрегирования.

Установление определенных пропорций между интенсивностями всех производственных способов производственного комплекса соответствует выбору некоторого опорного плана.

Фиксирование пропорций между компонентами можно рассматривать как задание способа производства (столбца) в упрощенной модели и приписать ему переменную интенсивность. Вектор затрат и выпуска, соответствующий максимальному значению этой укрупненной интенсивности, допустимому с точки зрения производственных возможностей, называется опорным планом. При этом упрощенной моделью множества допустимых планов служит одно линейное неравенство, которому должны подчиняться эти укрупненные интенсивности.

Важнейший частный случай представляет такое производство, когда при каждом производственном способе производится не больше одного конечного продукта. В этом случае каждому конечному продукту можно поставить в соответствие оптимальный способ его производства (опорный план). Если после этого суммировать с оптимальными весами (оценками) все балансы промежуточных продуктов и балансы отраслей, то получится аппроксимация в виде одного линейного неравенства

$$Cx \leqslant M, \qquad \text{(VI.2)}$$

где вектор x — вектор выпуска конечных продуктов. Оценка j-го вида продукции при этом будет равна

$$p_j = qC_j + pa_j, \qquad \text{(VI.3)}$$

где C_j — j-я компонента вектора C; q — оценка ограничения (VI.2); pa_j — оценка внешних материальных затрат на производство единицы j-го вида продукции.

В работе [18] предлагается использовать в качестве весов для агрегирования не оценки p, а компоненты вектора C, т. е. ввести следующий показатель выпуска производственного комплекса (отрасли):

$$X = Cx.$$

Это обосновывается тем, что при изменении компонент вектора x, не меняющем значения X, не может произойти также нарушения ограничения (VI.2). Это соображение верно в том случае, если прокатная оценка qC_j составляет основную часть оценки (цены) p_j, а оценка текущих затрат (pa_j) мала. В общем случае, однако, изменение компонент вектора x в пределах ограничения (VI.2) может привести к нарушению ограничений по выпуску ресурсов, выполняющих роль затрат для данного комплекса.

24⁰. Возможный алгоритм связи модели всей системы в укрупненных показателях с детализированными моделями подсистем

В работе [8] предлагается итеративный процесс для решения системы балансовых уравнений, при котором на каждой итерации решается агрегированная система, причем агрегирование производится в соответствии с описанными выше принципами. В работах [62, 55] описаны алгоритмы решения задачи линейного программирования, основанные на тех же принципах.

Рассмотрим применение этих принципов к решению модели, описанной в 22⁰. Общая модель состоит из моделей L_k отраслей, в которых ограничения (задания по выпуску) зависят от планов других отраслей x^l $(l \neq k)$, а критерий — от оценок продукции других отраслей.

Упрощенную модель народного хозяйства получим, агрегируя в один столбец (производственный способ) все столбцы данной отрасли и в одно ограничение — все балансы ее

продукции. Кроме того, надо произвести агрегирование по балансам в каждой отрасли промежуточных продуктов (в одно ограничение) и по мощностям оборудования (в одно ограничение).

Обозначим p^k, π^k и q^k векторы оценок, соответствующие группам ограничений по балансам продукции, балансам промежуточных продуктов и балансам мощностей для k-й отрасли, как это изображено на рис. 3. Введем агрегированные показатели (будем называть их индексами):

X^k — индекс интенсивности k-й отрасли;

P^k — индекс цен на продукцию k-й отрасли;

Q^k — индекс прокатной оценки оборудования в k-й отрасли;

Π^k — индекс оценок на промежуточную продукцию k-й отрасли.

Для краткости условимся, что символ $j \in k$ означает, что j-я строка (или j-й столбец) принадлежит к группе строк (столбцов), характеризующих k-ю отрасль. Обозначим

$$M^k = \frac{1}{Q^k}(q^k, m^k), \quad \tilde{\alpha}^k = \frac{1}{P^k}(p^k, \alpha^k),$$

$$\tilde{\beta}^k = \frac{1}{P^k}(p^k, \beta^k), \quad \bar{a}_i^{lk} = \frac{1}{X^k}\sum_{j \in k} a_{ij}^{lk} x_j^k \quad (i \in l),$$

$$\tilde{a}^{lk} = \frac{1}{P^l}\sum_{i \in l} p_i^l a_{ij}^{lk} \quad (i \in k),$$

$$\approx^{lk}_{a} = \frac{1}{P^l X^k}\sum_{\substack{i \in l \\ j \in k}} p_i^l a_{ij}^{lk} x_j^k, \qquad \text{(VI.4)}$$

$$\tilde{b}_i^k = \frac{1}{X^k}\sum_{j \in k} b_{ij}^k x_j^k \quad (i \in k) \qquad \tilde{b}_j^k = \frac{1}{\Pi^k}\sum_{i \in k} \pi_i^k b_{ij}^k \quad (j \in k),$$

$$\approx^{k}_{b} = \frac{1}{X^k \Pi^k}\sum \pi_i^k b_{ij}^k x_j^k \qquad \bar{c}_i^k = \frac{1}{X^k}\sum_{j \in k} e_{ij}^k x_j^k \quad (i \in k),$$

$$\tilde{c}_j^k = \frac{1}{Q^k}\sum_{i \in k} q_i^k c_{ij}^k \; (j \in k) \qquad \approx^{k}_{c} = \frac{1}{X^k Q^k}\sum_{\substack{j \in k \\ i \in k}} q_i^k c_{ij}^k x_j^k.$$

Если бы было известно решение общей задачи, т. е. оптимальные значения векторов x^k и p^l, то векторы индексов $X = (X^1, \ldots, X^K)$ и $P = (P^1, \ldots, P^K)$, и $Q = (Q^1, \ldots, Q^K)$

были бы решением (план и оценки) следующей задачи математического программирования.

Задача *L*:

$$\varphi(u) = \max,$$

$$\sum_l \widetilde{\widetilde{a}}^{kl} X^l \geqslant \tilde{\alpha}^k + \tilde{\beta}^k u^k,$$

$$\widetilde{\widetilde{c}}^k X^k \leqslant M^k.$$

Заметим, что ограничение $\widetilde{\widetilde{b}}^k X^k \geqslant 0$ выполняется автоматически, так как

$$\widetilde{\widetilde{b}}^k X^k = \frac{1}{X^k \Pi^k} \sum_{i \in k} \pi_i^k \left(\sum_{j \in k} b_{ij}^k x_j^k \right)$$

по известному соотношению дополняющей нежесткости произведения $\pi_i^k \sum_{j \in k} b_{ij}^k x_j^k$ все равны нулю, т. е. $\widetilde{\widetilde{b}}^k = 0$.

Если в качестве индексов X^k взять валовой выпуск отраслей в оптимальном плане, а индексы цен P^k положить равными единице, то матрица $\| \widetilde{\bar{a}}^{k'} \|$, очевидно, будет иметь вид $E - A$, где A — матрица прямых затрат в оптимальном межотраслевом балансе.

Только что описанная модель в основном совпадает с аппроксимационной моделью, сформулированной в работе [18].

Рассмотрим следующий итеративный процесс. Пусть на t-й итерации нам известны детализированные и укрупненные показатели плана и оценок — векторы $x^k(t)$, $p^k(t)$, $q^k(t)$ для всех отраслей и векторы $X(t)$, $P(t)$, $Q(t)$. Формируем задачу L, подставляя эти значения вместо оптимальных в формулы (VI.4), и решаем ее. Полученные при ее решении векторы $X(t+1)$, $P(t+1)$ и $Q(t+1)$ могут быть использованы для формирования или уточнения исходных данных отраслевых моделей (задач L_k). Они могут быть интерпретированы как прогноз о предполагаемых изменениях в уровнях производства и цен. А именно вместо задачи L_k с «оптимальными» исходными данными решаем задачу $L_k(t)$:

$$\left[\sum_{l \neq k} P^l(t+1) \tilde{a}^{lk}(t) \right] x^k + Z_k(t) u^k = \max,$$

$$a^{kk}x^k - \beta^k u^k \geqslant \alpha^k - \sum_{l \neq k} \bar{a}^{kl}(t) X(t+1),$$

$$b^k x^k \geqslant 0,$$

$$c^k x^k \leqslant m^k,$$

$$x^k \geqslant 0,$$

которая отличается от задачи L_k тем, что вместо векторов $p^l a^{lk}$ и $a^{kl}x^l$ $(l \neq k)$ взяты их аппроксимации $P^l(t+1)\tilde{a}^{lk}(t)$ и $\bar{a}^{kl}X^l(t+1)$. Векторы $\tilde{a}^{lk}(t)$ и $\bar{a}^{kl}(t)$ рассчитываются по формулам (VI.4), в которые вместо p, x, P, X подставлены векторы $p(t)$, $x(t)$, $P(t)$, $X(t)$. Величина $Z_k(t) = \dfrac{\partial \varphi(u(t))}{\partial u_k}$.

Полученные при решении задач $L_k(t)$ новые значения векторов $p^k(t+1)$, $x^k(t+1)$ и $q^k(t+1)$ используются для построения уточненных исходных данных агрегированной модели, и начинается новый цикл итерации. Процесс заканчивается только тогда, когда значения переменных на двух соседних итерациях совпадут с достаточной точностью. Легко проверить, что это соответствует решению задачи.

Предположим, что агрегирование (выделение отраслей и групп ресурсов) произведено так, что взаимосвязи внутри каждой отрасли или группы продуктов (взаимозаменяемость, комплектность, общность промежуточных продуктов и оборудования, применяемых при разных производственных способах в отрасли) более сильны, чем связи между отраслями. Тогда можно ожидать, что соотношения между оценками $p_1^k, p_2^k, \ldots$ продуктов одной отрасли и между интенсивностями $x_1^k, x_2^k, \ldots$ окажутся мало зависящими от уровней производства и уровней цен в других отраслях (*автономность детализированных моделей по отношению к агрегированным*). Это влечет за собой устойчивость элементов агрегированной модели и, следовательно, быструю сходимость процесса итераций. Как во всяком итеративном процессе, большое значение для ускорения сходимости может иметь демпфирование колебаний.

Заметим, что алгоритм взаимодействия детализированных и агрегированных моделей дает разрешение противоречия между использованием средних и предельных

показателей. В оптимальном плане *показатели, «средние» по группе продуктов или группе способов* (в нашей модели X, P, Q), действительно *средние из «предельных» показателей* (у нас x, p, q), а предлагаемый процесс демонстрирует формирование весов такого усреднения с помощью усреднения во времени.

Описанный алгоритм может быть представлен в виде игры отраслей с центром, при котором каждый игрок, стремясь к максимизации своего выигрыша, выбирает в качестве своей оптимальной стратегии решение соответствующей задачи оптимизации (отрасль — решение задачи L_k, центр — решение задачи L).

К сожалению, представление в виде игры не позволяет в данном случае выяснить математические условия сходимости процесса итераций путем применения общих теорем, так как игра оказывается, вообще говоря, невыпуклой.

По-видимому, даже более важным, чем выяснение математических условий сходимости, является проведение вычислительных экспериментов с целью выяснения эффективности различных алгоритмов, подобных описанному. Пока эксперименты для выяснения эффективности алгоритмов итеративного агрегирования проводились в НИЭИ Госплана СССР под руководством Э. Б. Ершова по решению систем уравнений межотраслевого баланса и дали хорошие результаты.

25⁰. Модели перспективного планирования в укрупненных показателях и их связь с отраслевыми моделями

Как уже говорилось, основное значение построения упрощенных моделей хозяйственных комплексов состоит в том, что получающиеся при этом укрупненные показатели оказываются более устойчивыми по отношению к резким изменениям, возникающим в хозяйственной системе за счет ввода в действие новых предприятий, открытия новых месторождений, изменений погодных условий и других предвиденных и непредвиденных событий. Устойчивость укрупненных показателей дает возможность воспользоваться аппаратом линейного программирования или хотя бы моделями оптимального программирования с непрерывными переменными и гладкими функциями

для формализации задач перспективного планирования. Это представляет настолько большие преимущества для практического планирования и теоретических исследований, что вряд ли можно ставить вопрос о целесообразности интенсивных усилий по разработке таких моделей.

В 24° был описан естественный способ агрегирования в модели линейного программирования как подмодели общей модели (II.2—II.6) (модель текущего планирования). Исследование по агрегированию показателей, зависящих от дискретных переменных (δ_j и θ_j; в модели (II.2—II.6), пока, видимо, вовсе не проводилось, хотя в практике планирования этот прием используется повсеместно. Цель такого агрегирования — получение линейных и близких к ним по свойствам нелинейных моделей.

Один из способов введения укрупненных показателей и связей между ними предложен в работах [36, 66]. Там предполагается, что увеличение производственной мощности на единицу связано с известными объемами затрат продукции фондообразующих отраслей в каждый из предшествующих лет. В символах модели (II.2—II.6) это предположение означает, что приращение $\Delta v(t)$ вектора капитальных затрат (продукции фондообразующих отраслей) в год t — линейная функция от векторов $\Delta m(t+\tau)$ приращения производственных мощностей в последующие годы ($\tau>0$):

$$\Delta v(t) = \sum_{\tau>0} K(\tau)\,\Delta m(t+\tau). \qquad \text{(VI.5)}$$

В пределах укрупненной (линейной или выпуклой) народнохозяйственной модели матрица $K(\tau)$ («капитальные коэффициенты») считается известной и *не зависящей от искомых величин* $\Delta v(t)$ и $\Delta m(t+\tau)$, хотя, может быть, и меняющейся в зависимости от t. О связи матрицы $K(\tau)$ с показателями $v(\tau)$, θ , δ основной модели см. 21°.

Это предположение, по-видимому, может оказаться приемлемым для высокой степени агрегирования, когда каждый год вводится в строй много предприятий данной отрасли. При более дробном разбиении хозяйства на отрасли большую роль будет играть специализация предприятий внутри одной отрасли и связанные с ней различия структуры капитальных затрат и длительности

строительства. Поэтому, может быть, для линейных моделей с более дробной номенклатурой отраслей придется отказаться от надежды получить правильное распределение объемов и затрат и ввода новых мощностей по годам планового периода и стремиться к получению только средних или суммарных показателей за несколько лет. Дальнейшее уточнение при этом должно производиться только с помощью моделей развития отдельных отраслей, включающих дискретные переменные. Разрешение этого сомнения, по-видимому, будет результатом накопления опыта построения и расчета укрупненных моделей всего хозяйства и моделей развития отдельных отраслей.

Если это сомнение обоснованно, то имеет смысл дальнейшее упрощение моделей, т. е. рассмотрение моделей, содержащих только суммарные или средние показатели несколько лет. Такие показатели могут быть получены из модели вида (II.2—II.6), в которой единицей времени считается не год, а отрезок в несколько лет. Это соответствует современной практике планирования, когда первоначально (в виде первого приближения) определяются общие объемы капиталовложений по отраслям на пятилетку.

Другой способ введения усредненных показателей предложен в работах [36, 67, 68]. Там предлагается постулировать априори определенный вид кривой развития каждой отрасли на рассматриваемый отрезок времени. По-видимому, наиболее приемлема для большинства отраслей экспонента (гипотеза постоянного темпа роста на рассматриваемый период). При этом остается единственный неизвестный параметр, характеризующий развитие каждой отрасли в рассматриваемый отрезок времени,— «темп роста». Такое предположение резко упрощает модель и дает разрешение некоторых принципиальных вопросов ее построения. В частности, оно дает естественное решение проблемы определения необходимых объемов капиталовложений в последние годы планового периода.

Рациональность использования того или иного способа введения усредненных показателей при моделировании той или иной подсистемы, видимо, может быть окончательно установлена только при построении конкретных моделей и проведении вычислительных экспериментов на них.

VII. МОДЕЛЬ ПЕРСПЕКТИВНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА И ЦЕНООБРАЗОВАНИЕ

26°. Модели перспективного планирования

В этом параграфе будет рассмотрена несколько более конкретная форма модели перспективного планирования всего народного хозяйства в укрупненных показателях, стоящей в «вершине» иерархии. Эта конкретизация представляется необходимой для создания цельного впечатления о связи всех моделей, их взаимоотношения с общим критерием оптимальности и обсуждения вопросов ценообразования.

Мы не касаемся территориального аспекта, чтобы не усложнять изложение и выделять основные принципы и приемы построения системы моделей. Эти принципы, в частности, могут быть применены и при включении в систему моделей размещения.

Приводимая ниже модель и ее анализ (см. [36 и 78]) представляют собой усовершенствование моделей и анализа, предлагаемого в работах [15] и [66]. Близким по целям и результатам является исследование [69].

Все хозяйство представляется состоящим из n отраслей производства, каждая из которых характеризуется некоторым показателем активности x_k, $k=1,\ldots, n$ (например, валовой выпуск продукции или нормативная стоимость обработки); $x=(x_1,\ldots, x_n)$ — вектор показателей активности. Все виды ресурсов и услуг предполагаются разбитыми на m групп, и каждая группа измеряется некоторой синтетической единицей измерения (обычно суммарной ценой). Мы будем для простоты эти группы называть продуктами.

A — матрица $(m \times n)$ технологических коэффициентов (a_{ij} — количество валового выпуска или общих затрат i-го продукта, соответствующее единичной активности j-й отрасли), так что Ax означает вектор конечного выпуска (или затрат, если соответствующая компонента отрицательна) различных продуктов всеми отраслями производства. Элементы матриц и векторов могут изменяться во времени.

Если число продуктов равно числу отраслей ($m=n$) и в качестве показателей активности x выбраны валовые выпуски отраслей, то матрица A имеет вид $E-a$, где a — матрица коэффициентов прямых затрат.

M — вектор характеристик мощности производственных комплексов (возможностей развивать производственную активность в данную единицу времени), или величина, ограничивающая x, так что $x \leqslant M$.

В более общем случае можно считать, что ограничения производственных возможностей имеют вид $Dx \leqslant M$, где D — матрица использования различных компонентов вектора мощностей M, ограничивающего производственную активность. Размерность вектора M необязательно совпадает с размерностью n вектора x.

Наконец для учета ограниченности невоспроизводимых факторов, таких как природные ресурсы, запишем ограничения в виде $QM \leqslant R$.

B — матрица $(m \times n)$ фондоемкостей различных отраслей, включая нормативные запасы оборотных фондов продукции и ресурсов, так что общее количество различных фондов по народному хозяйству составляет вектор $S^t = B^t M^t$.

γ — матрица долей выбытия фондов различных видов в разных отраслях за единицу времени, так что общее выбытие фондов дается вектором γM.

Независимость процесса выбытия различных видов фондов от их возраста (от момента их первоначального создания) является также упрощением, которое может быть заменено схемами, более адекватными реальности (различными для разных отраслей и разных видов фондов), и также не влияет на верность основных выводов.

$K^t(\tau)$ — матрица $(m \times n)$ капитальных коэффициентов, т. е. затраты продукции разных отраслей на единич-

ный прирост мощностей M^t, которые должны быть произведены за время τ до момента t ввода в строй соответствующей единицы мощности, так что

$$\int_0^\infty K^t(\tau)\,d\tau = B^t, \text{ или } \sum_0^\infty K^t(\tau) = B^t.$$

$\Delta S^t = S^{t+1} - S^t$ — чистые капиталовложения (чистый прирост фондов) в период t. Эта величина складывается из капитальных затрат, которые надо произвести в период t для обеспечения запланированного прироста мощностей во все последующие периоды времени:

$$\Delta S^t = \sum_{\tau=1}^{\infty} K^{t+\tau}(\tau)\,\Delta M^{t+\tau},$$

где $\Delta M^t = M^{t+1} - M^t$.

l — матрица количеств рабочей силы различной квалификации, необходимых для единичной активности различных отраслей (в разных районах страны).

L — вектор общих ресурсов рабочей силы различной квалификации в различных районах, так что $lx \leqslant L$.

Следует отметить, что в условиях высокой технической оснащенности и бурного технического прогресса, характерных для современного хозяйства, важное значение имеет правильный учет необходимых затрат на подготовку кадров, научные исследования, покупку лицензий и на все то, что можно объединить термином «технологический капитал». В связи с этим, видимо, подготовку необходимого контингента инженерно-технических работников для различных отраслей хозяйства лучше учитывать по тому же образцу, что и создание основных фондов, а в неравенстве $lx \leqslant L$ учитывать только трудовые ресурсы невысокой квалификации.

Одним из существенных недостатков модели представляется ее линейность, точнее, то обстоятельство, что коэффициенты затрат и выпуска в ней считаются заданными и не подлежат оптимизации. В отношении капитальных затрат и затрат труда этот недостаток, видимо, имеет смысл исправить, используя для ряда отраслей производственные функции, например типа известных функций Кобба — Дугласа (см., например, [75]). В от-

ношении текущих материальных затрат вряд ли целесообразно пытаться разрешить проблему таким путем, так как большинство элементов матрицы прямых затрат обладает достаточной устойчивостью. В то же время с точки зрения перспективного планирования рациональное, направленное изменение технологических коэффициентов имеет не меньшее, а, может быть, даже большее значение, чем планирование объемов выпуска продукции. По-видимому, обоснованное описание возможностей изменения технологических коэффициентов для ряда отраслей с большими возможностями изменения структуры затрат (например, таких как сельское хозяйство) и ряда продуктов (например, таких как химические материалы, конкурирующие с традиционными) есть тот пункт, где особенно важно взаимодействие укрупненной модели с моделями развития отдельных отраслей.

Предположим, что объемы предметов и услуг, составляющие непроизводственное потребление в единицу времени,— линейная векторная функция $\alpha+\beta f$ от одного параметра f — показателя уровня потребления за данную единицу времени (см. 9° и 17°).

Для завершения системы ограничений в модели необходимо записать балансовые соотношения по всем видам ресурсов для каждой единицы времени. Для этого необходимо сделать предположение о связи выбытия фондов и необходимого возмещения их в каждой отрасли. В первом приближении, в особенности для укрупненных моделей, можно принять предположение, что все выбывающие фонды (вектор γM) должны возмещаться немедленно, так что никакие виды мощностей не должны убывать:

$$\Delta M^t \geqslant 0.$$

Экспериментальные расчеты должны показать, для каких видов мощностей подобные ограничения оказываются экономически неоправданными. Для соответствующих отраслей должно быть проведено дополнительное исследование и принятые предположения должны быть заменены более соответствующими реальности.

Таким образом, в этих обозначениях балансово-производственные ограничения можно записать в виде следующей системы соотношений:

$$Ax \geqslant \Delta S^t + \gamma M + \alpha + \beta f, \qquad \text{(VII.1)}$$

где $\Delta S^t = \sum_{\tau=1}^{\infty} K^{t+\tau}(\tau)\,\Delta M^{t+\tau}$;

$$Dx \leqslant M, \qquad \text{(VII.2)}$$

$$QM \leqslant R, \qquad \text{(VII.3}$$

$$lx \leqslant L, \qquad \text{(VII.4)}$$

$$M^t = \sum_{\tau=-\infty}^{t-1} \Delta M^\tau, \quad \Delta M \geqslant 0. \qquad \text{(VII.5)}$$

Верхний индекс в этих формулах (который во многих случаях опущен) указывает момент времени, к которому относится величина.

Заметим, что ограничения (VII.1—VII.5) не учитывают одной важной черты реальной экономики — возможности накопления запасов и смягчения за счет этого несоответствия во времени возможностей производства и потребностей в различных видах ресурсов и работ. Эту возможность можно учесть в модели с помощью введения неотрицательных векторов наличных (сверхнормативных) запасов V^t. При этом балансовые соотношения превратятся в уравнения вида

$$Ax = \alpha + \beta f + \Delta S + \gamma M + \Delta V, \qquad \text{(VII.1}')$$

где $\Delta V^t = V^{t+1} - V^t$ — прирост запасов за единицу времени (компоненты его необязательно положительны). Введя вектор ΔV, можно смягчить слишком жесткое предположение, касающееся фиксирования сроков строительства и необходимых для этого материалов и оборудования, так как строительные работы и оборудование могут «запасаться впрок».

Для определенности рассмотрим критерий оптимальности следующего вида. Будем считать, что изменение f^t во времени есть функция некоторого однопараметрического семейства, зависящего от параметра U:

$$f^t = f^t(U). \qquad \text{(VII.6)}$$

При возрастании U величина $f^t(U)$ возрастает, например $f^t(U) = f^0(1 + Ut)$, или $f^t(U) = f^0 e^{Ut}$.

Критерий оптимальности состоит в максимизации параметра U. Для удобства сопоставления масштаба оценок с масштабом существующих цен запишем критерий в виде

$$ZU = \max, \qquad \text{(VII.7)}$$

где Z — постоянная, выполняющая роль нормировочного множителя. Все основные выводы не зависят от конкретного вида критерия оптимальности.

27°. Сопоставление цен для разных моментов времени

Необходимость соизмерения ценностей во времени приводит к значительному постоянному понижению общего уровня оценок с течением времени. Исследования [26, 27] показывают, что при естественных предположениях, основными из которых являются предположения типа (III.5′) и условие стационарности во времени, понижение уровня оценок должно происходить даже при отсутствии роста показателя f^t потребления. Использование таких оценок, быстро понижающихся со временем, было бы крайне неудобно и вызывало бы необходимость частых пересчетов. В процессе развития товарно-денежного хозяйства выработался кредитно-денежный механизм, который позволяет сопоставлять ценности во времени при постоянном уровне (масштабе) цен путем *дисконтирования*. На языке моделей оптимального планирования это можно выразить следующим образом.

Обозначим всю систему оценок, рассчитанных в настоящий момент, т. е. в год $s = 0$, и относящихся к году t, через P_0^t. В обозначениях 28° $P_0^t = (p^t, \psi^t, W^t, r^t, v^t)$. При решении задачи оптимального планированиия через год мы получим для года t некоторую систему оценок, которую обозначим через P_1^t и т. д. При решении модели t-го года получим оценки P_t^t.

Как отмечалось в 12°, задача оптимального планирования должна ставиться так, чтобы план и оценки, являющиеся результатом ее решения, были согласованы с планом и оценками, которые будут получаться при решении аналогичной задачи оптимального планирования в будущем (если пренебречь ошибками прогноза). При этом согласованность оценок, если

предположить их единственность, должна выражаться в их пропорциональности: системы оценок, относящиеся к одним и тем же периодам времени, когда бы они ни рассчитывались, должны совпадать с точностью до нормировочного (неотрицательного) множителя (ср. [2]).

В наших обозначениях

$$P_0^t = P_1^t \lambda_{1,0} = \ldots = P_t^t \lambda_{t,0},$$

вообще

$$P_s^t = P_t^t \lambda_{t,s}$$

параметр ν, введенный в 12°, соответствует $\lambda_{t,t+1}$). Очевидно,

$$\lambda_{s,t} = \lambda_{t,s}^{-1},$$

где через $\lambda_{t,s}$ мы обозначили коэффициенты пропорциональности, или коэффициенты приведения (дисконтирования).

Это дает возможность производить расчеты, касающиеся использования ресурсов в год t, по оценкам, соответствующим модели, рассчитываемой в этом же году, а при сопоставлении ценностей за разные годы использовать коэффициенты дисконтирования. Оценки, рассчитанные в t-м году, т. е. P_t^t, естественно использовать в качестве *цен*. Мы будем их называть ценами и обозначать $\hat{P}^t$. В обозначениях, которые будут введены в 30⁰,

$$\hat{P}^t = (\hat{p}^t, \hat{\psi}, \hat{w}^t, \hat{r}^t, \hat{\nu}^t).$$

Нормировка (масштаб) цен в каждом году может выбираться так, чтобы общий уровень цен, измеряемый каким-либо индексом, оставался по возможности более стабильным. В условиях той сложности, которой обладает экономическая система, это имеет существенное значение с точки зрения сокращения пересчетов во всех моделях планирования, не говоря уже о социальных аспектах изменений системы розничных цен.

Как уже говорилось, известная модель Неймана [28] показывает, что постоянство структуры производства и потребления (при пропорциональном росте) должно приводить к постоянству соотношений между оценками, относящимися к одному периоду и к разным периодам, разделенным фиксированным промежутком времени. В наших обозначениях это соответствует тому, что можно

подобрать такую нормировку цен, при которой они будут постоянны и постоянным будет коэффициент дисконтирования:

$$\lambda_{t,s} = \lambda_{1,0}^{t-s}. \qquad \text{(VII.8)}$$

В связи с этим удобно представить коэффициент дисконтирования в виде

$$\lambda_{t,s} = e^{-\rho_{t,s}(t-s)}.$$

Заметим, что так как $\lambda_{s,t} = \lambda_{t,s}^{-1}$, то всегда $\rho_{s,t} = \rho_{t,s}$. Условие (VII.8) означает, что

$$\rho_{t,s} \equiv \rho = \text{const}. \qquad \text{(VII.9)}$$

В зависимости от способов пересчета цен и от способов их использования в управлении хозяйством меры, применяемые для стабилизации цен, могут приводить к тем или иным изменениям величины ρ во времени. По-видимому, требования достаточной стабильности одновременно и общего уровня цен и параметра дисконтирования не находятся в серьезном противоречии друг с другом, и стремление к их соблюдению — важное условие любых мероприятий по регулированию системы цен. В частности, гипотеза о постоянстве параметра дисконтирования ρ играет фундаментальную роль в большинстве приближенных перспективных расчетов (постоянная норма эффективности).

Следует отметить, что для многих экономистов представляется наиболее естественным выражать оценки всех ресурсов в труде, т. е. принимать оценку труда за масштаб для оценки остальных ресурсов. Это может иметь значение для решения тех или иных теоретических вопросов, в частности, в силу использования трудовых ресурсов во всех областях производства. Однако в силу более медленных темпов роста трудовых ресурсов по сравнению с темпом роста всего хозяйства оценка труда, как правило, должна возрастать в сравнении с оценками других ресурсов. Конечно, могут происходить и обратные процессы. Например, при высоких темпах автоматизации ресурсы труда низкой квалификации могут обесцениваться. Во всяком случае, так как труд составляет только

часть, притом иногда не бо́льшую, всех ресурсов, участвующих в производстве, искусственное стремление использовать оценку труда в качестве масштаба при оценке всех остальных ресурсов, видимо, привело бы к большим неудобствам из-за нестабильности соотношения оценок труда и других ресурсов.

28⁰. Принципы расчета цен

Теоретическое положение о том, что оптимальные цены есть цены равновесия, не снижает возможности вопроса о формулировке принципов и методов расчета цен, эффективных с точки зрения практического осуществления таких расчетов и дающих цены, достаточно близкие к оптимальным. Среди экономистов часто происходят споры о природе цен: являются ли основой цен затраты (например, затраты труда) или полезности (потребительские оценки)? Одно из достижений экономико-математической науки — разрешение этого противоречия. Как известно, оптимальными цены могут быть только в том случае, *если полностью учтенные затраты на производство продукта совпадают с его потребительской оценкой*. Если речь идет о процессе разработки оптимального плана и системы цен, то необходимо исчислять оценки как по затратам, так и по результатам и корректировать план и цены в случае их несовпадения. Ввиду сложности исчисления потребительских оценок наибольшее практическое значение приобретает *затратный принцип* расчета. О совпадении или несовпадении цен, рассчитанных по затратному принципу, с потребительскими оценками обычно можно узнать только косвенно по факту реализации продукции. Под затратным принципом расчета цен обычно понимают следующее.

Как известно, в линейных моделях оптимального планирования сумма затрат и сумма результатов любого хозяйственного мероприятия, исчисленные в оптимальных оценках, равны между собой. Точнее, оценка продукта равна суммарной оценке текущих материальных затрат на его производство плюс прокатная оценка производственных мощностей и рабочей силы, выступающих как ограничения при его производстве. В свою очередь сумма прокатных оценок производственной мощности (оборудование и т. д.) за все годы ее функционирования

(с учетом коэффициента приведения к моменту ее создания, см. [2] или 27⁰) должна быть равна общей сумме затрат на ее создание, т. е. стоимости (оценке) производственных фондов. Прокатные оценки отдельных видов фондов для каждой единицы времени, как уже говорилось, должны колебаться. Но для получения приемлемых устойчивых значений (усредненных по времени и по видам фондов) можно принять, что прокатная оценка каждого вида фондов за единицу времени составляет определенный процент от общей оценки этих фондов (норма прибыли). Если принять, что оценка используемой рабочей силы пропорциональна заработной плате работников, то получим затратный метод расчета цен. Он состоит в установлении цены продукта как суммы текущих материальных затрат, величины, пропорциональной заработной плате работников, и определенной доли (процента) от стоимости производственных фондов. Очевидно, что при таком методе остается много неясностей и условностей при решении таких вопросов, как исчисление оценки фондов и ее изменения во времени, распределение постоянных затрат и процента от стоимости фондов по разным видам продукции и т. д.

Большей части этих условностей можно избежать, если рассчитывать план и цены на основе детальных моделей оптимального планирования. Усредненные показатели, близкие к оптимальным, которые могли бы быть использованы в перспективных расчетах, можно вычислить и с помощью затратного метода при условии, что нормы прибыли и коэффициенты пропорциональности между оценками труда и заработной платой получены на основе расчета многоотраслевых моделей перспективного планирования в укрупненных показателях. В силу наличия обратных производственных связей нахождение системы цен, удовлетворяющей такому затратному принципу, может быть осуществлено путем итеративного процесса их последовательного уточнения. Для реализации такого процесса могут быть использованы например, идеи метода расчета трудоемкостей, изложенного в работе [71]. В процессе изменения цен могут измениться также исходные данные укрупненных моделей. Поэтому итеративный процесс может включать в себя также уточнение норм прибыли по отраслям и других укрупненных показателей.

Так как оптимальные цены, как уже говорилось, в то же время и затратные (при правильном понимании и применении этого принципа), то расчет цен по затратному принципу и их постоянная корректировка в соответствии с изменениями плана могут рассматриваться как подалгоритм общего алгоритма нахождения оптимального плана и оптимальных цен. Для этого цены на продукцию каждой отрасли, рассчитанные по затратному принципу, должны использоваться для сравнения экономического эффекта ее применения и совершенствования планов во всех отраслях, потребляющих эту продукцию. Примером схематического описания такого процесса может служить алгоритм, изложенный в 22^0 и 24^0. Очевидно, эти цены могут быть использованы не для всех целей, для которых могли бы быть использованы оценки, рассчитанные более дифференцированно. Например, они не годятся для сравнения эффективности разных видов оборудования в пределах одной и той же отрасли. Для этого они должны корректироваться в соответствии со спросом и предложением и т. д.

Таким образом, в основе затратного метода лежит замена прокатных оценок различных видов оборудования единой нормой прибыли по целой отрасли производства. Еще более сильным огрублением является *гипотеза о равенстве норм прибыли для всех отраслей* (принцип цены производства см. [72]). Такое предположение оправдано в том случае, если темпы изменения (оптимальных) прокатных оценок во всех отраслях одинаковы (см. 29°).

Теоретическим обоснованием разумности принципа цены производства может служить известная модель Неймана (см. [28]), вообще, любая модель, в которой соотношения оценок оказываются постоянными во времени. *В условиях неизменности цен во времени принцип цены производства (единая норма прибыли) соответствует принципу оптимальности.* Действительно, оптимальность плана и оценок означает, что никакому хозяйственному комплексу изменение плана не может дать увеличения прибыли (согласно оптимальным оценкам). В то же время неравенство норм прибыли по отраслям означало возможность увеличить сумму прибыли за счет перераспределения части фондообразующих средств из одной части хозяйства в другую.

При учете движения цен это соображение перестает быть верным. Предположим, что продукция некоторой отрасли становится все более дефицитной, так что прокатная оценка ее производственных мощностей возрастает. Тогда оказывается выгодным увеличивать производственные мощности даже за счет таких вариантов капитальных вложений (строительство и реконструкция), для которых *в настоящий момент* прибыль на один рубль капиталовложений существенно ниже средней, так как эти затраты окупятся при увеличении прокатной оценки (и прибыли) в будущем. Это означает, что восстановительная стоимость фондов (по замыкающим вариантам) должна быть такова, что в настоящее время норма прибыли в данной отрасли (согласно оптимальным оценкам) ниже средней. Наоборот, *если прокатная оценка* производственных мощностей отрасли *убывает*, т. е. *продукция дефицитна в настоящий момент* и со временем ее дефицитность будет снижаться, то *норма прибыли в этой отрасли в настоящий момент должна быть выше средней* (ср. [2], стр. 228—229). Математическое обоснование этих положений см. в 29⁰).

Необходимо подчеркнуть еще раз, что в силу существенной дискретности переменных в моделях создания производственных мощностей равенство затрат и результатов в оптимальном плане имеет только статистический смысл. Он выполняется только в той мере, в какой оказываются адекватными реальности народнохозяйственные модели, полученные с помощью статистического усреднения показателей. Поэтому и цены, исчисленные по затратному принципу, могут быть только статистическим приближением к оптимальным оценкам.

Решение общей задачи народнохозяйственного планирования с непрерывными и дискретными переменными и выбор в качестве цен оценок ресурсов из (линейных) задач текущего планирования разрешило бы многие спорные вопросы в области ценообразования, которые не могут получить однозначного и полного решения без учета фактора целочисленности. Таким является, например, вопрос *о включении постоянных текущих затрат в цены разных видов продукции*, имеющий важное практическое значение при исчислении цен на основе затратного принципа.

29°. Соотношение между ценами и оценками

Рассмотрим модель (II.1). Обозначим вектор оценок ограничений группы a (II.1) через p (оценка внешних ресурсов), оценки для ограничений группы $б$ (II.1) — через π (оценки промежуточных ресурсов), для ограничений третьей группы $в$ (II.1) — через q (прокатные оценки производственных мощностей). Выписывая соотношение двойственной задачи, легко убедиться, что вне зависимости от критерия оптимальности оптимальные оценки подчиняются ограничениям

$$pa + \pi b \leqslant qc, \qquad \text{(VII.10)}$$

причем те строчки этого векторного неравенства, которые соответствуют производственным способам, вошедшим в оптимальный план ($x_j \geqslant 0$), выполняются как равенства:

$$(pa + \pi b)_j = (\tilde{q}\,\tilde{c})_j, \text{ если } x_j > 0.$$

Умножая эти равенства на x_j и суммируя, получим

$$py = pax = qcx = qm.$$

Это равенство означает, что цена продукции минус цена текущих переменных затрат должна быть равна прокатной оценке производственных мощностей (с учетом оценки занятой при производстве рабочей силы).

Благодаря наличию дискретных переменных связь прокатных оценок мощностей с оценками капитальных затрат на их создание и постоянных затрат, связанных с их эксплуатацией, в частности с оценкой занятой рабочей силы,— статистическая. Она может быть выявлена при рассмотрении модели перспективного планирования в укрупненных показателях (см. 27°).

Введем следующие обозначения оценок для различных групп ограничений в модели (VII.1—VII.6):

VII.1) — p^t; (VII.2) — ψ^t; (VII.3)—r^t; (VII.4)—w^t; (VII.5)—v^t.

В этих обозначениях соотношения двойственной задачи запишутся в следующем виде:

$$pA \leqslant wl + \psi D, \qquad \text{(VII.11)}$$

причем

$$(pA)_j = (\omega l + \psi D)_j, \text{ если } x_j > 0.$$

Это соотношение эквивалентно соотношению (VII. 10).

$$\psi \leqslant \nu + p\gamma + rQ, \qquad \text{(VII.12)}$$

причем

$$\psi_j = \nu_j + (p\gamma)_j + (rQ)_j, \text{ если } M_j > 0.$$

Так как предположено, что $\Delta M \geqslant 0$, то можно считать, что условие $M_j > 0$ выполняется для всех j, и неравенство (VII.12) заменить на равенство:

$$\psi = \nu + p\gamma + rQ.$$

Введем обозначения:

$$g^t = \sum_{\tau=1}^{\infty} p^{t-\tau} K^t(\tau),$$

$$h^t = \sum_{\tau=1}^{\infty} \nu^{t+\tau},$$

$$h^t \leqslant g^t, \qquad \text{(VII.13)}$$

причем $h_j^t = g_j^t$, если $\Delta M_j^t > 0$,

$$p^{t+1} \leqslant p^t, \qquad \text{(VII.14)}$$

причем $p_j^{t+1} = p_j^t$, если $V_j^t > 0$.

Условие (VII.14) соответствует балансовому соотношению в форме (VII.1′). Оно отсутствует, если используются балансовые ограничения в форме (VII.1).

$$Z = \sum_{t=0}^{\infty} (\rho^t \beta^t)\ (f^t(U))_U^{\cdot}. \qquad \text{(VII.15)}$$

При этом на величины ψ, r, ω и вектор p в случае условия (VII.1) накладывается дополнительное условие неотрицательности. Наоборот, величины ν могут быть, вообще говоря, как положительными, так и отрицательными.

Перепишем соотношения (VII.11—VII.15) в терминах $\hat{P}^s$

(т. е. в ценах, см. 27°) для базового года или для момента составления плана:

$$\hat{p}A - \hat{\omega}l - \hat{\psi}D \leqslant 0, \tag{VII.16}$$

$$(\hat{p}A - \hat{\omega}l - \hat{\psi}D)_j = 0, \text{ если } x_j > 0.$$

$$\hat{\psi} = \hat{\nu} + p\gamma + rQ, \tag{VII.17}$$

$$\hat{h}_j^t \leqslant \hat{g}^t, \tag{VII.18}$$

$$\hat{h}_j^t = \hat{g}_j^t, \text{ если } \Delta M_j^t > 0,$$

где $\hat{g}^t = \sum_{\tau=1}^{\infty} \hat{p}^{t-\tau} K^t(\tau)\, e^{+\rho_{t-\tau,t}\tau}$,

$$\hat{h}^t = \sum_{\tau=1}^{\infty} \hat{\nu}^{t+\tau} e^{-\rho_{t+\tau,t}\tau},$$

$$\hat{p}^{t+1} \leqslant \hat{p}^t e^{\rho_{t+1,t}}, \tag{VII.19}$$

$$\hat{p}_j^{t+1} = \hat{p}_j^t e^{\rho_{t+1,t}}, \text{ если } V_j^t > 0.$$

$$Z = \sum_{t=0}^{\infty} (\hat{p}^t, \beta^t)\, (f^t(U))'_U\, e^{-\rho_{t,0}t}. \tag{VII.20}$$

Важно отметить, что соотношения (VII.16—VII.20) не зависят от вида критерия оптимальности, как и все выводы 28°—29°.

Запишем еще непрерывные аналоги величин $\hat{g}^0$ и $\hat{h}^0$:

$$\hat{g}^0 = \int_0^{\infty} \hat{p}^{-\tau} K^t(\tau)\, e^{\rho_{\tau,0}\tau}\, d\tau, \tag{VII.21}$$

$$\hat{h}^0 = \int_0^{\infty} \hat{\nu}^{\tau} e^{-\rho_{\tau,0}\tau} d\tau.$$

В соответствии со смыслом объективно обусловленных оценок можно дать следующую интерпретацию различных компонент вектора оценок $\hat{p}$ и соотношений (VII.16—VII.20) между ними:

$\hat{p}$ — оценки ресурсов, или цены;

$\hat{\omega}$ — оценки различных видов труда, или заработная плата (о соотношении оценок труда и заработной платы см. 30⁰);

$\hat{\psi}$ — прокатные оценки оборудования, или плата за использование фондов (включая возмещение фондов, выбывающих вследствие износа);

$\hat{r}$ — (прокатные) оценки природных ресурсов и других невоспроизводимых факторов, или рента.

Соотношение $\hat{h} = \hat{q}$ можно интерпретировать как равенство капитальных затрат $\hat{g}$ на создание единицы мощности общему эффекту от ее введения (с учетом сложных процентов), а $\hat{v}^t$ — как чистый эффект в период t от использования производственной мощности, или фондов (без учета рабочей силы).

Равенство (VII.12) можно теперь выразить следующим образом: прокатная оценка, или прибыль от использования производственной мощности (без оценки труда), должна включать амортизационные отчисления $\hat{p\gamma}$, ренту $\hat{rQ}$ и чистый эффект от использования производственных мощностей.

Заметим, что в формуле (VII.10) прокатная оценка q производственных мощностей включала оценку рабочей силы. В настоящей модели оценка рабочей силы введена отдельно, так что можно записать

$$qC = \hat{w}l + \hat{\psi}D.$$

Равенство (VII.11) можно рассматривать как формулу ценообразования. Если заработная плата соответствует оценкам труда $\hat{w}$, то цена продукта должна равняться себестоимости (без учета амортизации) плюс прокатная оценка производственных мощностей в которую входят амортизационные отчисления).

Примем гипотезу: общий уровень цен регулируется так, что параметр $\rho_{t,0}$ можно считать постоянным на протяжении периода затухания экспоненты $e^{-\rho t}$, т. е. за период порядка $\frac{1}{\rho}$ единиц времени. Как будет показано ниже, величина ρ примерно соответствует средней норме рентабельности. По различным статистическим оценкам, величина, обратная средней норме рентабельности для СССР, колеблется от 5 до 10 лет.

Если, кроме того, показатели чистого эффекта $\hat{v}^t$, а следовательно, и полные оценки фондов $\hat{h}^t$ остаются постоян-

ными за период порядка $\frac{1}{\rho}$ единиц времени, то из равенства (VII.13) следует, что

$$\hat{v} = \rho \hat{h}, \tag{VII.22}$$

а учитывая равенство $\hat{g} = \hat{h}$, получаем, что чистый эффект равен проценту ρ от капитальных затрат $\hat{g}$ на единицу мощности. Такое предположение приводит к утверждению близости оптимальных оценок и цен, рассчитанных по формуле цены производства [72].

Чтобы сделать более наглядной связь соотношения (VII.13) с формулой цены производства, предположим, что каждый продукт производится одним способом, и матрица A имеет вид $E - a$, где E — единичная матрица; $a = (a_{ij})$— матрица коэффициентов прямых затрат в межотраслевом балансе; Q — единичная матрица, т. е. ограничение (VII.2) записывается как $x \leqslant M$.

Используя соотношения (VII.1), (VII.2), (VII.16), (VII.17) получаем:

$$\hat{p}_j x_j = \sum_i \hat{p}_i a_{ij} x_j + \sum_k \hat{\omega}_k l_{kj} + \sum_i \hat{p}_i \gamma_{ij} M_j + \hat{v}_j M_j$$

(предполагаем, что $\hat{r} = 0$, рента отсутствует). В левой части равенства стоит цена продукции. Сумма всех членов правой части, кроме последнего, есть себестоимость продукции с учетом амортизации основных фондов). Если верно (VII.22), то прибыль $\hat{v}_j M_j$ исчисляется как равный процент от общей цены фондов $\hat{h}_j M_j$.

В соответствии с [72] цена производства определяется себестоимостью плюс определенный процент от общих затрат на создание фондов в рассматриваемый период времени (восстановительная стоимость) плюс рента за использование невоспроизводимых факторов. Так что расчет цен производства должен проводиться по новым и эффективно работающим предприятиям. На предприятиях с устаревшим оборудованием при этом, конечно, прокатная оценка может составлять существенно меньшую долю от первоначальной стоимости фондов, чем на предприятиях той же отрасли с современным оборудованием.

Прибыль, получаемая на предприятиях с устаревшей, малопроизводительной техникой, имеет характер не прокатной оценки оборудования, а ренты на невоспроизводимые ресурсы. Учет этого обстоятельства при расчете цен производства требует оценки воспроизводимости (т. е. рациональности воспроизводства) данного вида фондов в данный период, так как использование отдельных видов фондов или производственных способов становится со временем нерациональным.

В терминах рассматриваемой модели вектор $\hat{g}^t$ соответствует именно затратам на создание производственных мощностей в момент t, т. е. восстановительной стоимости фондов или, точнее, производственных мощностей.

Остальные (невоспроизводимые) виды мощностей и другие невоспроизводимые ресурсы получили в модели только прокатную рентную оценку. Однако им естественно приписать также полную оценку (капитализированная рента), или цену как сумму чистого эффекта от их использования за все будущие периоды времени. Так, полная оценка (ненормированная) невоспроизводимых ресурсов выражается в виде

$$R^0 = \sum_{\tau=1}^{\infty} r^\tau.$$

Нормированная оценка (приведенная в моменту 0), или цена, аналогично оценке фондов, равна

$$\hat{R}^0 = \sum_{\tau=0}^{\infty} \hat{r}^\tau e^{-\rho_{\tau,0}\tau} \approx \int_0^{\infty} \hat{r}^\tau l^{-\rho_{\tau,0}\tau} d\tau.$$

В дальнейшем, говоря об оценках фондов, мы будем иметь в виду как воспроизводимые, так и невоспроизводимые фонды, считая их рентной, прокатной оценкой — величину $\hat{v}^t$ (соответственно $\hat{r}^t$), а полной оценкой, или ценой, — величину $\hat{h}^t$ (соответственно $\hat{R}^t$).

Предлагаемая модель дает также возможность проанализировать основные причины отклонений оптимальных цен (оценок) от цен производства.

Если невоспроизводимость фондов в данный период, о которой говорилось выше, учитывается при расчете цен производства, то основной причиной отклонения следует считать неравенство норм прибыли для разных видов мощностей, происходящее от изменения полной оценки фондов $\hat{h}^t$ и прокатной оценки $\hat{\nu}^t$ во времени. Предположим, что прокатная оценка для j-го вида мощности в течение периода порядка $1/\rho$ единиц времени не останется постоянной, а существенно падает или возрастает, например, с постоянным темпом:

$$\hat{\nu}_j^t = \hat{\nu}_j^0 e^{-\xi_j t}.$$

Согласно (V.3), из этого следует, что полная оценка фондов $\hat{h}_j^t$ падает или возрастает с тем же темпом ξ_j. Тогда

$$\hat{h^0} = \int_0^\infty \hat{\nu}_j^t e^{-\rho t}\, dt = \frac{\hat{\nu}_j^0}{\rho + \xi_j}, \quad \hat{\nu}_j = (\rho + \xi_j)\, \hat{h}_j.$$

Средняя норма прибыли от всех фондов при таком предположении есть

$$E = \frac{\Sigma \nu_j^0 M_j^0}{\Sigma \hat{h}_j^0 M_j^0} = \frac{\Sigma \xi_j \hat{h}_j^0 M_j^0}{\Sigma \hat{h}_j M_j^0} + \rho.$$

Определим средний темп падения полной оценки фондов как

$$\bar{\xi} = -\frac{d}{dt}\left(\ln \sum_j \hat{h}_j^t M_j^0\right)_{t=0} = \frac{\Sigma \xi_j \hat{h}_j^0 M_j^0}{\Sigma \hat{h}_j^0 M_j^0}.$$

Теперь можно сформулировать следующее положение. Средняя норма прибыли E отличается от коэффициента дисконтирования на величину среднего темпа $\bar{\xi}$ падения полной оценки фондов. Норма прибыли $\rho + \xi_j$ в j-й отрасли выше (ниже) средней $\rho + \bar{\xi}$ на ту же величину, на которую темп ξ_j падения полной оценки фондов в этой отрасли выше (ниже) среднего темпа $\bar{\xi}$ падения полной оценки фондов.

30°. Оптовые и розничные цены. Связь уровня цен и денежных доходов населения

В модели функционирования товарно-денежного механизма (13°) цены p выполняют двоякую функцию. Они выступают как коэффициенты линейной формы, с одной стороны, в критериях оптимальности (прибыль) производственных объемов и, с другой стороны, в ограничении возможностей потребителя:

$$(p, x) \leqslant S.$$

В реальной экономике эти функции выполняют две разные системы цен: оптовые и розничные цены, которые могут существенно различаться. Из рассмотрения модели следует (см. также 17°), что если розничные цены не будут пропорциональны оптимальным оценкам, то план потребления, оптимальный с точки зрения этих цен, не будет оптимальным с точки зрения всей хозяйственной системы. То же самое можно сказать о случае отклонения системы оптовых цен от оптимальных оценок p^*.

Таким образом, *в оптимальной экономической системе*, если не учитывать торговых издержек и необходимости государственного воздействия на спрос и потребление, *розничные цены должны быть пропорциональны оптовым* (и оптимальным производственным оценкам). Например, завышение розничной цены на некоторый товар по сравнению с соответствующей оптовой (относительно цен на другие товары) может привести к снижению спроса, в то время как этот товар очень дешев в производстве, и удовлетворение потребностей с помощью этого товара очень выгодно с общественной точки зрения. Поэтому в целях использования возможностей оптимизации в отношении наиболее экономного удовлетворения потребностей соотношения между розничными ценами, как правило, должны соответствовать соотношениям между оптовыми ценами, за исключением таких товаров, на которые специально устанавливаются повышенные или пониженные цены, как на винные изделия или медикаменты.

Ввиду наличия колхозного рынка и личного подсобного хозяйства у трудящихся для полного использования экономических методов управления хозяйством и правильного сопоставления затрат и результатов с помощью

цен (особенно в сельском хозяйстве) важно, чтобы уровень розничных цен был по возможности близок к уровню оптовых (с учетом торговых издержек).

В целях воздействия государства на спрос и потребление населения розничные цены *на отдельные товары* должны значительно отличаться от соответствующих оптовых цен. Это может осуществляться с помощью отчислений типа современного налога с оборота. Другой функцией налога с оборота может быть сглаживание колебаний производственных оценок в отношении их влияния на розничные цены. Однако его влияние не должно сказываться слишком сильно. Налог с оборота имеет тот недостаток, что, отрывая потребительские оценки от производственных, нарушает обратную связь — влияние спроса на производство, вернее, искажает ее действие.

Аналогичные соображения, по-видимому, имеют силу для обоснования пропорциональности между оценками различных видов труда и его оплатой. Серьезное нарушение пропорциональности между шкалой оплаты различных видов труда и шкалой их производственных оценок приводит к нарушению материальной заинтересованности или даже действию фактора материальной заинтересованности в противоречии с общественными интересами.

В частности, отклонение реальных норм оплаты труда в колхозах от объективно обусловленных оценок труда в сельском хозяйстве вызывало снижение материальной заинтересованности колхозников и было одной из главных причин снижения эффективности колхозного производства.

Установление оплаты труда как функции от его оценки есть наиболее естественная конкретизация принципа оплаты по труду, так как с экономической точки зрения мера труда — его эффективность по сравнению с другими производственными ресурсами, или его производственная оценка. Таким образом, оплата труда должна быть пропорциональна его оценке (или, во всяком случае, функцией от оценки).

Однако она не обязана совпадать с ней даже по общей сумме. Отклонение общего уровня оплаты труда от уровня его производственной оценки (в обозначениях 27° и 29° — $\hat{w}$) означает следующее. В себестоимость продукции при калькуляции должна входить производ-

ственная оценка (wL), равная расходам предприятий, связанным с использованием рабочей силы. Это необходимо для правильного соизмерения затрат труда с затратами других ресурсов при плановых расчетах в оперативном управлении и для правильной оценки деятельности предприятия. Эта сумма может включать кроме заработной платы, получаемой на руки работниками, различные начисления на заработную плату и прямые налоги, основная цель которых — перераспределение благ среди членов общества (подоходный налог, налог за бездетность и т. д.).

Таким образом, общий уровень оценки труда определяется общим уровнем цен на все ресурсы, функционирующие в производстве. Общая сумма оплаты труда — основная составная часть денежных доходов членов общества, которые должны балансироваться с общей суммой розничных цен той части потребительских благ, которая распределяется с помощью товарно-денежного механизма (розничный товарооборот), точнее, проходит через денежный бюджет потребителя.

Как видно из предыдущего, описанные модели оптимального планирования дают возможность определять планы производства и потребления и *соотношения* между ценами на один и тот же момент времени. *Уровни* цен зависят от параметра дисконтирования $\rho_{s,t}$, который не может быть определен из описанных моделей.

Однако следует иметь в виду, что любые изменения в распределении доходов могут происходить практически только путем его повышения у тех или иных групп населения.

Указанное выше ограничение роста доходов может оказаться нерациональным с точки зрения оптимизации системы распределения. Поэтому необходимость изменений в распределении дохода может вызывать его более интенсивный рост, чем это допустимо с точки зрения сохранения постоянного уровня розничных цен. Таким образом, *общий уровень цен и параметр дисконтирования зависят от динамики доходов населения и той доли предметов потребления и услуг, которая распределяется с помощью товарно-денежного механизма.*

VIII. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ВНЕДРЕНИЯ СИСТЕМЫ ОПТИМАЛЬНОГО ПЛАНИРОВАНИЯ[1]

31°. Этапы разработки и внедрения системы оптимального планирования

Разработка и внедрение в практику планирования системы экономико-математических моделей могут происходить *параллельно и одновременно на всех уровнях хозяйственной иерархии*. Очевидно, независимое внедрение моделей оптимизации в отдельных звеньях системы экономического управления сопряжено с трудностями следующего порядка. Пока не получены расчеты по моделям низших уровней (например, по моделям развития отраслей), нельзя проверить допустимость многих упрощающих предположений, которые приходится делать при разработке упрощенных моделей высших уровней (например, модель развития народного хозяйства). И наоборот, при конструировании модели развития отрасли приходится использовать те или иные предположения о внешних параметрах (ценах и объемах потребностей в продукции отрасли), и расчет при значениях этих параметров далеких от оптимальности, может привести к неправильным результатам.

Концепция итеративного совершенствования моделей и планов при обмене информацией между моделями в принципе снимает это противоречие. Однако указанные трудности должны привести к тому, что первое время построение и расчет моделей будут играть подчиненную роль, как разработка одного из вариантов плана, и только впоследствии займут ведущее положение, а нефор-

---

[1] Этот раздел написан совместно с Б. П. Суворовым.

мальный анализ моделей планов будет играть подчиненную роль.

Как уже отмечалось, большинство исходных данных моделей всех уровней должно носить статистический характер вне зависимости от «оптимальности» показателей, на которые они опираются, и «оптимизироваться» в соответствии с процессом действительной оптимизации этих показателей в процессе совершенствования системы хозяйственного руководства. Другими словами, исходные данные каждой модели должны по возможности точно отражать те связи и величины, которые характеризуют или будут характеризовать хозяйство в тот период, к которому относится модель. При этом следует учитывать, что такие показатели, как цены, в настоящее время могут значительно отличаться от действительных оценок ресурсов в хозяйстве в силу излишней стабильности и недостаточной связи показателя прибыли с материальным поощрением работников, которая создавала бы стимул к совершенствованию системы цен.

Поэтому в настоящее время огромное значение имеет проведение расчетов по определению основных изменений, которые должны быть внесены в соотношение цен на продукцию разных отраслей хозяйства для их приближения к соотношению действительных (или оптимальных) оценок. Такие расчеты ведутся в настоящее время в Институте электронных управляющих машин АН СССР и НИЭИ Госплана СССР. Модели, по которым ведутся эти расчеты, содержат по необходимости сильные произвольные допущения: принцип единой нормы прибыли для всех отраслей (принцип цены производства) или экспертные оценки отклонения норм прибыли от средней. Однако основные направления необходимых изменений могут быть получены в результате таких расчетов. В дальнейшем, когда будут доведены до практического использования модели оптимального перспективного планирования, указанные модели ценообразования могли бы войти в них как часть итеративного алгоритма расчета, как подпрограмма уточнений оценок ресурсов по заданным нормам прибыли отраслей.

Отмечая принципиальную возможность внедрения моделей оптимизации одновременно на различных уровнях хозяйственной иерархии, следует признать, что внедрение методов оптимального планирования сопряжено с

серьезной перестройкой работы плановых органов и других хозяйственных организаций. Указанные выше и другие трудности, возникающие при их внедрении, свидетельствуют о том, что в условиях планового руководства экономикой такую перестройку рациональнее проводить последовательными этапами, охватывающими целиком определенные уровни системы управления.

Первый этап внедрения методов оптимального планирования должен состоять во *внедрении системы моделей оптимального планирования на высших уровнях хозяйственной иерархии.* Усиление роли экономических методов руководства хозяйством и самостоятельности отдельных хозяйственных единиц, намеченное сентябрьским Пленумом ЦК КПСС 1965 г., делает особенно актуальным совершенствование методов планирования и руководства на высших уровнях иерархии (отрасль, народное хозяйство), так как только это позволит создать условия, при которых самостоятельность и инициатива отдельных предприятий будут направлены в полном соответствии с интересами всего народного хозяйства.

Задачами первого этапа должны быть разработка и доведение до практического использования системы следующих моделей:

1) модели перспективного планирования в разрезе нескольких десятков отраслей и совершенствование на ее основе соотношений в уровнях оптовых цен;

2) модели территориального размещения народного хозяйства по районам, взаимосвязанной с моделью первого типа;

3) моделей перспективного планирования отраслей.

Вопросам построения такой системы моделей специально посвящена работа [73].

32⁰. Условия, необходимые для внедрения системы

Для реального внедрения этих моделей в практику планирования нужен целый ряд организационных и технических мероприятий.

1. Необходимо поднять заинтересованность коллективов предприятий, отраслевых комитетов и министерств в таком внедрении. Общие методы стимулирования за улучшение работы и увеличение прибыльности будут

играть в этом отношении основную роль. Однако следует разработать специальные меры по стимулированию тех групп работников, которые выступают инициаторами и осуществляют внедрение системы. Например, можно было бы установить порядок стимулирования работ по внедрению экономико-математических методов, на первых порах аналогичный существующему порядку стимулирования работ по внедрению новой техники в производство.

2. До тех пор пока работники плановых органов предприятий и отраслей не будут в достаточной мере знакомы с основами экономико-математического моделирования, эти работы не станут органической частью процесса планирования. Поэтому прежде чем начать работу по внедрению на каком-либо участке, необходимо обязать ведущих плановых работников, непосредственно связанных с подготовкой данных и анализом результатов расчета, пройти соответствующую подготовку (лучше всего со сдачей экзаменов). Или же штат этих работников должен быть укреплен сведущими людьми.

3. Следующее препятствие, которое необходимо преодолеть на пути к внедрению математических методов, отсутствие хорошо налаженного учета почти во всех звеньях управления народным хозяйством. Поэтому в настоящее время сбор и первичная обработка исходной информации для моделей, как правило, занимают в десятки раз больше времени и сил, чем разработка математической модели, и могут проводиться только высококвалифицированными работниками. По-видимому, даже можно говорить о намечающейся диспропорции в отношении разработки самих экономико-математических моделей и разработки методов и средств получения исходной информации для них. Дело здесь не только в организации хорошо налаженной системы учета, но в целом ряде случаев и в отсутствии технических средств учета. Например, пока нефтеперерабатывающая промышленность не получит надежных и точных приборов для измерения на потоке количества и качества нефти и нефтепродуктов, нельзя надеяться на эффективное регулярное использование моделей оптимизации в текущем планировании на предприятии.

4. Необходимое условие внедрения экономико-математических методов — коренное улучшение вычислитель-

ной базы. Недостаточное количество и, главное, качество и надежность существующих вычислительных машин в настоящее время препятствуют не только организации регулярных расчетов по сложным математическим моделям, но и проведению широких экспериментальных вычислительных работ. По-видимому, для исправления этого положения в короткое время необходимо, наряду с формированием разработки улучшенных образцов отечественных вычислительных машин, расширить покупку лучших образцов мировой вычислительной техники и патентов на их изготовление.

5. В настоящее время можно считать решенными основные теоретические проблемы моделирования текущего и перспективного планирования в отрасли. Поэтому назрела необходимость создания во всех отраслях (при министерствах или комитетах) специальных групп по разработке моделей оптимального планирования. На эти группы следует возложить обязанность разработать совместно с отраслевыми и академическими научно-исследовательскими организациями модели оптимального планирования отрасли, обеспечить проведение экспериментальных расчетов и экономического анализа. Результаты этой работы должны приниматься в организационном порядке специально созданной комиссией из ответственных работников министерств и научных организаций, а затем внедряться в практику плановой работы [2].

---

[2] Такие работы уже начаты в ряде отраслей.

ОСНОВНЫЕ ВЫВОДЫ

1. Задачей теории оптимального планирования и управления народного хозяйства является описание функционирования хозяйственных единиц органов экономического управления и их взаимодействия как единой системы и совершенствование этой системы на основе достижений математики, вычислительной техники и других наук. В этом смысле задачи теории оптимального планирования и управления совпадают с целями всей экономической науки. Эта теория дает новый научный язык для описания и исследования всех экономических явлений и возможность строго научного подхода к широкому кругу экономических явлений.

2. Экономика рассматривается как сложная система оптимального регулирования. Теоретической основой для ее анализа и совершенствования служит ее описание в виде комплекса взаимосвязанных моделей.

Процесс совершенствования планирования и управления есть последовательное «углубление оптимизации», связанное с внедрением математических методов и вычислительной техники во все более широкий круг процессов планирования и управления, и должен протекать поэтапно.

На каждом этапе оказывается формализованной все большая часть функций управления, которая определяется уровнем развития науки об обществе, уровнем техники, наличием квалифицированных кадров и т. п. Часть функций управления остается неформализованной.

3. Структура системы моделей должна отражать структуру хозяйственных связей, значительную автономность подсистем экономической системы и специфику различных задач планирования и управления.

Система моделей должна иметь многоступенчатую иерархическую структуру, отражающую подчиненность

систем управления как части и целого, так что модель более высокого уровня иерархии представляет собой комплекс взаимосвязанных моделей входящих в него подсистем. Кроме того, как правило, каждый уровень иерархии должен иметь упрощенную модель в укрупненных показателях, которая согласуется в процессе функционирования с детализованными моделями входящих в него подсистем.

4. Опыт разработки и применения моделей оптимизации показывает целесообразность специализации и стандартизации моделей, т. е. выделения нескольких наиболее простых и универсальных математических схем для описания широких классов задач оптимального планирования, обладающих различной спецификой. Опыт применения моделей оптимального планирования показывает, что для задач текущего планирования, как правило, достаточно хорошо подходят модели линейного программирования, для задач перспективного развития отдельных отраслей — линейные модели с условием целочисленности неизвестных («логические переменные»); для моделей народного хозяйства в укрупненных показателях снова появляется возможность использовать модели линейного программирования или близкие к ним схемы с непрерывными переменными.

5. Взаимодействие моделей подсистем в процессе составления оптимального плана всей системы и его реализации осуществляется в виде итеративного процесса, при котором решения одних моделей служат для уточнения параметров других моделей, описывающих связанные с ними подсистемы. Этот процесс может изучаться как алгоритм решения задачи нахождения оптимума и как процесс функционирования экономического механизма, что, в частности, и дает возможность изучать с помощью математических методов действие товарно-денежного механизма. Принципы оптимального функционирования экономического механизма могут изучаться вне зависимости от возможности формализации тех или иных его функций.

6. Важным теоретическим аппаратом для изучения рациональной системы взаимодействия хозяйственных единиц и органов управления, а также и соответствующих им математических моделей может служить их описание в виде игры, в которой стремление каждого звена

системы управления к максимизации своей функции выигрыша соответствует движению всей системы к оптимуму. Представление функционирования товарно-денежного механизма в терминах теории игр дает методологическую основу для организации системы оптимального стимулирования, точнее, для выбора системы показателей (критериев) оценки хозяйственной деятельности производственных и плановых органов.

7. Итеративные и статистические методы согласования моделей подсистем дают возможность использовать вычислительную технику в процессе взаимодействия как между моделями одного уровня иерархии и одной степени детализации, так и между моделями в агрегированных и детализированных показателях.

8. Цены, используемые при торговых операциях и взаимных расчетах поставщиков и потребителей, должны приближаться к оценкам ресурсов в моделях оптимального планирования с непрерывными переменными (в основном в линейных или выпуклых задачах текущего планирования) с учетом дисконтирования. Прием дисконтирования необходим как мера стабилизации общего уровня цен, имеющей важное значение для упрощения плановых расчетов и управления. Общий уровень цен и коэффициент дисконтирования зависят от динамики доходов населения и той части предметов потребления и услуг, которая распределяется с помощью товарно-денежного механизма.

Разработка и последовательное внедрение системы оптимального хозяйственного управления дадут руководителям хозяйства на всех уровнях хозяйственной иерархии объективные критерии и методы принятия решений, в наибольшей степени соответствующих цели социалистического производства. Это позволит сократить до минимума волюнтаризм в принятии хозяйственных решений и полностью использовать все преимущества планового ведения хозяйства. С другой стороны, это создаст предпосылки для дальнейшего развития инициативы и самостоятельности участников хозяйственного процесса в его совершенствовании.

ЛИТЕРАТУРА

1. Немчинов В. С. Экономико-математические методы и модели. М., Соцэкгиз, 1962.
2. Канторович Л. В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М., Изд-во АН СССР, 1960.
3. Пугачев В. Ф. О критерии оптимальности экономики. Сб. «Народнохозяйственные модели. Теоретические вопросы потребления». М., Изд-во АН СССР, 1963.
4. Волконский В. А. Об объективной математической характеристике народного потребления. Сб. «Народнохозяйственные модели. Теоретические вопросы потребления». М., Изд-во АН СССР, 1963.
5. «Оптимальное планирование в условиях большой размерности». «Экономико-математические тетради», вып. V. М., ЛЭММ АН СССР, 1963 (ротапринт).
6. Немчинов В. С. О дальнейшем совершенствовании планирования и управления народным хозяйством. М., Экономиздат, 1963
7. Волконский В. А. Оптимальное планирование в условиях большой размерности. Итеративные методы и принцип декомпозиции. «Экономика и математические методы», 1965, т. I, вып. 2.
8. Дудкин Л. М., Ершов Э. Б. Межотраслевой баланс и материальные балансы отдельных продуктов. «Плановое хозяйство», 1965, № 5.
9. «Модели и методы оптимального развития и размещения производства». Сб. статей. Научные труды НГУ, серия экономическая, вып. 3. Новосибирск, 1965.
10. «Модели и методы оптимального планирования». Сб. статей ЦЭМИ АН СССР. М., 1966 (ротапринт).
11. Пугачев В. Ф. Показатель хозяйственной деятельности и стимулирование работников в оптимальной экономической системе. «Экономика и математические методы», т. II, вып. 5, 1966.
12. Лурье А. Л. «О математических методах решения задач на оптимум при планировании социалистического хозяйства». М., изд-во «Наука», 1964.
13. Каценелинбойген А. И., Овсиенко Ю. В., Фаерман Е. Ю. Методологические вопросы оптимального планирования социалистической экономики. М., изд-во «Наука», 1964.
14. Лурье А. Л. Абстрактная модель оптимального хозяйственного процесса и о. о. оценки. «Экономика и математические методы», 1966, т. I, вып. 2.
15. Волконский В. А. Схема оптимального перспективного планирования и оценки ресурсов. Сб. «Применение математики в экономических исследованиях», т. 3. М., изд-во «Мысль», 1965.

16. «Новейшие тенденции в организации управления крупными фирмами в США». М., изд-во «Наука», 1966.
17. Slutsky Eug. Ein Beitrag zur formal — pracseologischen Grundlegung der Ökonomik. «Записки соціяльно-економічнаго віддлу», т. 4 (6). Киев, 1926, стр. 3—12.
18. Пугачев В. Ф. Аппроксимационная схема многоступенчатого оптимального планирования народного хозяйства. Сб. «Экономико-математические методы», вып. II. М., изд-во «Наука», 1965.
19. Медницкий В. Г. Алгоритмы планирования и управления (об использовании критерия максимизации выпуска в заданных пропорциях на промежуточных уровнях планирования). Сб. «Модели и методы оптимального планирования». М., ЦЭМИ АН СССР, 1966 (ротапринт).
20. Фридман Г. Я. Динамическая модель оперативного управления производством. «Экономика и математические методы», 1966, т. II, вып. 1.
21. Баширов С. А., Волконский В. А., Лоткин М. М., Манзон Ю. А., Поманский А. Б., Шапиро А. Д. Разработка оптимального плана перспективного развития отрасли (на примере нефтяного машиностроения). «Химическое и нефтяное машиностроение», 1967, № 1, изд. НИИТруда.
22. Махлуп Ф. Производство и распространение знаний в США. М., изд-во «Прогресс», 1966.
23. Глязер Л. С. Некоторые вопросы методологии планирования общественных фондов потребления. М., изд-во «Экономика», 1966.
24. Волконский В. А., Левкова Л. А. Зависимость потребления от дохода и возможность ее экстраполяции во времени. Сб. «Математические методы в экономике труда». М., изд. НИИТруда, 1966.
25. Гранберг А. Г. Целевая функция благосостояния и критерии оптимальности в прикладных народнохозяйственных моделях. Сб. «Проблемы народнохозяйственного оптимума». Новосибирск, Сибирское отделение изд-ва «Наука», 1966.
26. Koopmans T. C. Stationary cardinal utility and impatience. «Econometrica», 1960, v. 28, N 2.
27. Koopmans T. C., Diamond P. A., William R. E. Stationary utility and time perspective. «Econometrica», 1964, v. 32, N 1-2.
28. Гейл Д. Замкнутая линейная модель производства. Сб. «Линейные неравенства и смежные вопросы». М., ИЛ, 1959.
29. Швырков В. В. Закономерности потребления продовольственных и промышленных товаров. М., изд-во «Экономика», 1965.
30. Френкель М. Г., Лахман И. Л. Экономико-математические методы определения структуры платежеспособности спроса населения. Сб. «Статистическое изучение спроса и потребления». М., изд-во «Наука», 1966.
31. Швырков В. В. Многофакторные динамические модели потребительского спроса. Сб. «Статистическое изучение спроса и потребления». М., изд-во «Наука», 1966.
32. Слуцкий Е. Е. К теории сбалансированного бюджета потребителя. Сб. «Народнохозяйственные модели. Теоретические вопросы потребления». М., Изд-во АН СССР, 1963.
33. Frisch R. A complete scheme for computing all direct and cross demand elasticities in a model with many sectors. «Econometrica», 1959, v. 27, N 2.

34. Johansen L. A multisectoral stady of economic gicth. Amsterdam, 1960.
35. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М., изд-во «Мир», 1964.
36. Волконский В. А. Модель оптимального планирования и взаимосвязи экономических показателей. Сб. «Модели и методы оптимального планирования». М., ЦЭМИ АН СССР, 1966 (ротапринт).
37. Берж К. Общая теория игр нескольких лиц. М., Физматгиз, 1961.
38. Корнаи И., Липтак Т. Планирование на двух уровнях. Сб. «Применение математики в экономических исследованиях», т. 3. М., изд-во «Мысль», 1965.
39. Волконский В. А. Применение модели конкурентного равновесия к проблеме оптимального размещения производства. Сб. «Моделирование экономических процессов», вып. 2. Изд-во МГУ, 1967 (в печати).
40 Данциг Дж., Вольф Ф. Алгоритмы разложения для задач линейного программирования. «Математика», 1964, т. 8, № 1.
41. Волконский В. А. Система текущего планирования с помощью оценок ресурсов на основе матричных моделей. Сб. «Планирование и экономико-математические методы». М., изд-во «Наука», 1964.
42. Гейл Д. Теория линейных экономических моделей. М., ИЛ, 1963.
43. Цыпкин Я. З. Адаптация, обучение и самообучение в автоматических системах. «Автоматика и телемеханика», 1966, т. XXVII, № 1.
44. Цетлин М. Л. Конечные автоматы и моделирование простейших форм поведения. «Успехи математических наук», 1963, т. XVIII, вып. 4.
45. Гельфанд И. М., Цетлин М. Л., Пятецкий-Шапиро И. И. О некоторых классах игр и игр-автоматов. «Докл. АН СССР», 152 (1963), № 4, стр. 845—848.
46. Волконский В. А., Кузовкин А. И. Обоснование максимизации выпуска в заданных пропорциях как критерия для оптимального планирования производства. Сб. «Моделирование экономических процессов», вып. 2. Изд-во МГУ, 1967 (в печати).
47. «Процессы регулирования в моделях экономических систем». Сб. статей. М., ИЛ, 1961.
48. Медницкий В. Г. О методе оптимального распределения плановых заданий в отрасли. Сб. «Модели и методы оптимального планирования». М., ЦЭМИ АН СССР, 1966 (ротапринт).
49. Данилов-Данильян В. И. Итеративный алгоритм решения задачи об оптимальной загрузке оборудования для производства с использованием полуфабрикатов. Сб «Модели и методы оптимального планирования». М., ЦЭМИ АН СССР, 1966 (ротапринт).
50. Данилов-Данильян В. И. Задачи большой размерности и итеративные методы оптимального планирования. Сб. «Модели и методы оптимального планирования». М., ЦЭМИ АН СССР, 1966 (ротапринт).
51. Материалы Всесоюзной конференции по применению экономико-математических методов и ЭВМ в отраслевом планировании и

управлении. Секция 1, «Применение экономико-математических методов в текущем отраслевом планировании». М., 1966 (ротапринт).
52. Пятецкий-Шапиро И. И., Волконский В. А., Левина Л. В., Поманский А. Б. Об одном итеративном методе решения задач целочисленного программирования. «Докл. АН СССР», 1966, т. 169, № 6, стр. 49—52.
53. Пятецкий-Шапиро И. И., Волконский В. А., Казакевич Д. М., Левина Л. В. Решение задач целочисленного программирования методом последовательного сокращения размерности. Научные труды НГУ, серия экономическая, вып. 7, часть II. Новосибирск, 1967.
54. Бусленко Н. П. Математическое моделирование производственных процессов. М., изд-во «Наука», 1964.
55. Волконский В. А. Использование специальной структуры матриц при решении задач планирования. «Экономика и математические методы», 1966, т. II, вып. 2.
56. Ершов Э. Б. О выявлении и использовании структурных особенностей матриц в плановых расчетах. «Экономика и математические методы», 1966, т. II, вып. 2.
57. Баранов Э. Ф. Особенности разработки систем районных межотраслевых балансов и методы расчета на их основе. Канд. дисс. Изд-во МГУ, 1964.
58. Лейбкинд Ю. Р. Применение блочных матриц для приближенных плановых расчетов. Сб. «Народнохозяйственные модели. Теоретические вопросы потребления». М., Изд-во АН СССР, 1963.
59. Гаврилец Ю. Н. Специальные методы исследования линейных экономико-математических моделей. Канд. дисс. Изд-во МГУ, 1963.
60. Волконский В. А. Модель текущего отраслевого планирования и аппроксимация производственных возможностей нефтеперерабатывающего завода. «Математические методы в экономике и планировании», вып. 3. М., ЦЭМИ АН СССР, 1965 (ротапринт).
61. Гаврилец Ю. Н. Проблема агрегирования и оптимизация экономико-математических моделей. Сб. «Оптимальное планирование в условиях большой размерности». Экономико-математические тетради», вып. V. М., ЛЭММ АН СССР, 1963 (ротапринт).
62. Дудкин Л. М. Модели оптимального планирования народного хозяйства. Материалы научной конференции по проблемам совершенствования планирования, организации и управления социалистическим производством. Изд-во МГУ, 1965.
63. Дудкин Л. М. Оптимальный материальный баланс народного хозяйства. Модели для текущего и перспективного планирования. М., изд-во «Экономика», 1966.
64. Щенников Б. А. Блочный метод решения систем линейных уравнений большой размерности. «Экономика и математические методы», 1965, т. I, вып. 6.
65. Щенников Б. А. Решение систем линейных уравнений методом итеративного агрегирования. «Экономика и математические методы», 1966, т. II, вып. 5.
66. Гаврилец Ю. Н., Михалевский Б. Н., Лейбкинд Ю. Р. Линейная модель оптимального роста плановой экономики. Сб. «Применение математики в экономических исследованиях», т. 3. М., изд-во «Мысль», 1965.

67. Конюс А. А. Перспективное планирование при предположении равномерного роста капиталовложений. Сб. «Планирование и экономико-математические методы». М., изд-во «Наука», 1964.
68. Маш В. А. О задаче оптимального развития народного хозяйства в отраслевом и территориальном разрезе. «Экономика и математические методы», 1965, т. I, вып. 6.
69. Канторович Л. В., Макаров В. Л. Оптимальные модели перспективного планирования. Сб. «Применение математики в экономических исследованиях», т. 3. М., изд-во «Мысль», 1965.
70. Бир Ст. Кибернетика и управление производством. М., изд-во «Наука», 1965.
71. Машинский И. А. Народнохозяйственная трудоемкость продукции. М., изд-во «Наука», 1966.
72. Белкин В. Д. Цены единого уровня и экономического измерения на их основе. М., Экономиздат, 1963.
73. Аганбегян А. Г. Система экономико-математических моделей территориально-производственного планирования на перспективу. Сб. «Проблемы народнохозяйственного оптимума». Новосибирск, Сибирское отделение изд-ва «Наука», 1966.
74. Гаврилец Ю. Н. К вопросу о критерии оптимальности экономической системы. «Экономика и математические методы», 1966. т. III, вып. 2.
75. Михалевский Б. Н. Перспективные расчеты на основе простых динамических моделей. М., изд-во «Наука», 1964.
76. Klein L., Kosobud R. The econometrics of growth, Great ratios of Economics. «The Quarterly Journal of Economics», 1961. v. LXXV, N 2.
77. Kusnetz S. Capital in the american economy, Its formation and financing. N.— J., 1962.
78. Беленький В. З. О моделях оптимального планирования, основанных на схеме межотраслевого баланса. «Экономика и математические методы», 1967, т. III, вып. 4.
79. Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М.— Л., Физматгиз, 1963.
80. Uzawa H. Optimal growth in two — sector model of capital accumulation. The review of economic studies, 1964, v. XXXI (1), N 85.

СОДЕРЖАНИЕ[1]

Введение 3

I. Понятие народнохозяйственного оптимума 7
1°. О системе оптимального планирования и управления . 7
2°. О распределении функций хозяйственного управления 9
3°. Описание народного хозяйства с помощью системы взаимосвязанных экономико-математических моделей . . 14

II. Модели оптимального планирования производства . . 17
4°. О стандартизации моделей 17
5°. Система моделей текущего планирования производства 20
6°. Возрастание сложности при применении моделей оптимального программирования в оперативном управлении производством * 24
7°. Модели перспективного планирования 25
8°. Модели оптимального планирования развития отрасли производства 29

III. Модели потребления и критерий оптимальности . . 34
9°. О критерии оптимальности 34
10°. Моделирование личного потребления 39
11°. Проблема соизмерения ценностей во времени . . . 46
12°. Согласованность критериев во времени * 49

IV. Модель экономического равновесия и товарно-денежный механизм 55
13°. Модель экономического равновесия 55
14°. Теоретические основы выбора показателя для оценки хозяйственной деятельности 62
15°. Ограничения в использовании товарно-денежного механизма и цен для оптимального управления хозяйством 67

V. Алгоритмы планирования. Взаимодействие хозяйственных единиц и звеньев системы экономического управления . 70
16°. Принципиальная схема итеративного алгоритма последовательного улучшения плана всей системы путем взаимного уточнения моделей подсистем. Теоретические основы саморегулирования 70
17°. Упрощенные модели критерия оптимальности . . . 75
18°. Функционирование систем оптимального планирования как человеко-машинной системы 79

[1] Разделы, отмеченные звездочкой, при первом чтении могут быть пропущены.

19°. Статистический характер экономической информации и вычислительные алгоритмы оптимального планирования 81
20°. О стохастических методах целочисленного программирования 85
VI. Выявление структуры производственных связей. Агрегирование 91
21°. Об устойчивости показателей в моделях оптимизации . 91
22°. Возможный подход к выявлению структуры производственных связей и типизации моделей оптимального планирования 94
23°. Агрегирование и построение упрощенных моделей . . 103
24°. Возможный алгоритм связи модели всей системы в укрупненных показателях с детализированными моделями подсистем * 108
25°. Модели перспективного планирования в укрупненных показателях и их связь с отраслевыми моделями . . . 112
VII. Модель перспективного планирования народного хозяйства и ценообразование 115
26°. Модели перспективного планирования * 115
27°. Сопоставление цен для разных моментов времени . . 120
28°. Принципы расчета цен 123
29°. Соотношение между ценами и оценками * 127
30°. Оптовые и розничные цены. Связь уровня цен и денежных доходов населения 134
VIII. Некоторые вопросы внедрения системы оптимального планирования 137
31°. Этапы разработки и внедрения системы оптимального планирования 137
32°. Условия, необходимые для внедрения системы . . . 139
Основные выводы 142
Литература 145

ОПЕЧАТКИ И ИС

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
51	15 св.	$U_t({}_tf) = F\,(f^t,\ U_{t+1}\,(f))$	$U\,({}_tf) = F\,(f^t,\ U\,({}_{t+1}f))$
52	14 сн.	$F_t\,(\bar{\bar{x}}_t,\ U_{t+1}\,(Sx_t))$	$F_t\,(x_t,\ U_{t+1}\,(S\bar{x}_t))$
52	5 сн.	$(x_t^*,\ x_t^{**},$	$(x_t^*,$
53	5 св.	$\overline{P}_\tau^*$	$\bar{p}_\tau^*$
53	7 сн.	$\overline{P}_t^*$	$\bar{p}_\tau^*$
56	7 сн.	$x = (x_1, \ldots, x_y),$	$x = (x_1, \ldots, x_l),$
		а $y^k = (y_1, \ldots, y_y)$	а $y^k = (y_1^k, \ldots, y_l^k)$
57	14 сн.	$\bar{\bar{y}} \in Y^k$	$y^k \in Y^k$
	6 сн.	$p = (p_1, \ldots, p_j)$	$P = (P_1, \ldots, P_j)$
68	9 сн.	ответственности стимули-лирования	ответственности и стиму-лирования
72	8 св.	вниз по x_k	вниз по x
	10 св.	$(x_1, \ldots, x_n)$	$(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$
78	1 св.	x	$\hat{x}$
	16 св.	$x_p\,(s)$	$\hat{x} = x_p\,(\hat{s})$
100	10 сн.	$Z^1,\ u'$	$Z_1 u^1$
109	8 сн.	$\tilde{a}^{lk} = \frac{1}{P^l}\sum_{i\in l} p_i^l a_{ij}^{lk}\ (i \in k)$	$a_j^{lk} = \frac{1}{P^l}\sum_{i\in l} p_i^l a_{ij}^{lk}\ (j \in k)$
110	9 св.	$\frac{1}{X^k \Pi^k}\sum_{i\in k} \pi_i^k$	$\frac{1}{\Pi^k}\sum \pi_i^k$
127	16 св.	$(\tilde{q}\,\tilde{c})_j$	$(qc)_j$
129	5 св.	$\hat{v} + p\gamma + rQ$	$\hat{v} + \hat{p}\gamma + \hat{r}Q$
	6 св.	$\hat{h}_j^t = \hat{g}^t$	$\hat{h}^t = g^t$

В. А. Волконский